Capítulo 2.

Oscilaciones Amortiguadas, Forzadas y Resonancia.

Introducción: Nuestro objetivo en los primeros capítulos es el de comprender el comportamiento oscilatorio que presentan muchos sistemas simples en la Naturaleza.

Hasta ahora sólo hemos estudiado oscilaciones armónicas unidimensionales en donde no existe disipación de energía. Este modelo es el más simple de entender, pero resulta insuficiente para describir fenómenos físicos reales más complejos. Una primera mejora a nuestro modelo consiste en considerar que el sistema puede disipar energía, por ejemplo vía el rozamiento, y/o ganar (o perder) energía a través de la acción de una fuerza impulsora.

Como primer paso propondremos un modelo simple de disipación de energía y bajo estas nuevas condiciones estudiaremos la evolución dinámica del sistema masa-resorte.

Luego estudiaremos la respuesta del sistema cuando es sometido a la acción de una fuerza externa cuya intensidad varía armónicamente (una madre hamacando a su hijo).

Estos modelos simples nos permiten entender comportamientos físicos, muy generales, de sistemas oscilantes. Nos detendremos fundamentalmente en el estudio del fenómeno de resonancia, concepto fundamental, el cual se manifiesta en infinidad de sistemas físicos tales como instrumentos musicales, en sistemas eléctricos, en electrónica, en materiales, moléculas, átomos, núcleos atómicos, etc..

Los ejercicios recomendados son el 1, 3, 4, 5 y 7.

1. Ejercicio Teórico: **Oscilador armónico amortiguado.** Como primer paso hacia una mejor descripción de los fenómenos oscilatorios reales observados en la naturaleza, vamos a complejizar nuestro modelo simple, de la masa oscilante, considerando la posibilidad de que el sistema ***disipe energía***, a través de la fricción con el aire (no tomaremos en cuenta otro tipo de rozamiento).

Supondremos que las oscilaciones son lo suficientemente lentas como para que el aire al fluir sobre la masa pueda ser descripto como un fluido ideal fluyendo laminarmente, sin turbulencias. Dentro de esta aproximación, existen modelos hidrodinámicos adecuados que describen la fuerza amortiguadora actuante sobre la masa, debido al rozamiento con el aire. El más simple de ellos es el que obtenemos a partir de la ley de Stokes, el cual afirma que la fuerza amortiguadora F_a resulta proporcional a la velocidad del cuerpo, pero en sentido opuesto ya que se opone a su movimiento, es decir,

$$\boxed{\vec{F}_a = -b\,\vec{v}}, \qquad \textbf{(1)}$$

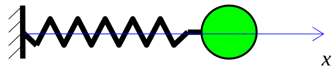
en donde b es una constante que determina el grado de amortiguación, depende de la viscosidad del medio y de las dimensiones de la masa. Este modelo de rozamiento se ajusta bastante bien (para velocidades bajas) a lo que se observa experimentalmente en fluidos.

A mayor velocidad mayor resulta la fuerza amortiguadora (de signo opuesto). Notar que el signo negativo indica claramente que la fuerza tiene permanentemente un sentido opuesto al sentido del movimiento, por lo cual concluimos ***que el trabajo hecho por esta fuerza resulta siempre negativo***, o sea, ***disipa continuamente energía***.

Veamos sobre el ejemplo las consecuencias de considerar esta forma de disipación de energía:

Ejemplo: Una partícula de masa $m = 1kg$ oscila unidimensionalmente unida a un resorte horizontal de constante elástica $k = 400 N/m$, y longitud relajada $l_0 = 30cm$, ver figura 1.

Fig.1



Considerando que el sistema disipa energía sólo debido al rozamiento con el aire, y que la fuerza amortiguadora puede modelarse a través de la expresión **1** (ley de Stokes)**,** halle la ley dinámica del sistema (unidimensional), es decir, halle la ecuación diferencial que describe el desplazamiento de la masa (segunda ley de Newton).

Respuesta:

$$\boxed{m\,\ddot{\Psi}_1(t) = -k\Psi_1(t) - b\dot{\Psi}_1(t)} \qquad \textbf{(2)}$$

donde $\Psi_1(t)$ *es el desplazamiento a partir del equilibrio en función del tiempo, es decir* $\Psi_1(t) = x(t) - x_{equi}$ *donde* $x_{equi} = l_0$ *(le hemos puesto el subíndice* 1 *para diferenciar de soluciones que obtendremos posteriormente).*

Podemos reescribir la ecuación **2,** pasando los términos al miembro izquierdo, dividiendo todos los términos por la masa *m* y definiendo dos nuevas constantes, como,

$$\boxed{\ddot{\Psi}_1(t) + \omega_0^{\,2}\,\Psi_1(t) + \Gamma\,\dot{\Psi}_1(t) = 0} \qquad \textbf{(3)}$$

donde,

$$\boxed{\omega_0^{\,2} = \frac{k}{m}} \qquad \text{o} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\,{}^{rad}\!/_{seg} \qquad (\textit{frecuencia natural}) \qquad \textbf{(4)}$$

y,

$$\boxed{\Gamma = \frac{b}{m}}, \qquad (\textit{coeficiente de amortiguamiento}) \qquad \textbf{(5)}$$

La constante Γ da cuenta del amortiguamiento del sistema (¿Cuáles son las unidades de Γ ?), mientras que ω_0 resulta ser ***la frecuencia natural del sistema***, es decir, la frecuencia a la que oscila la masa sin rozamiento (recordar el capítulo anterior, guía teórica 7).

La hemos llamado ω_0 y no ω , como en el capítulo anterior, para que sea más explícito su carácter de constante y porque reservamos el símbolo ω para denominar una frecuencia angular variable.

Dependiendo de lo intenso del amortiguamiento (dado por el coeficiente Γ) tendremos tres posibles soluciones de la ecuación **3** (o **2**), analizaremos caso por caso:

Primer Caso: Oscilador débilmente amortiguado o subamortiguado: En base a nuestra intuición física, podemos suponer que, si el rozamiento no es muy alto (amortiguamiento *b* bajo respecto de la constante elástica *k*), el movimiento continua siendo oscilatorio pero con amplitud decreciente (no periódico). En base a esto, discuta si la siguiente función podría representar la evolución dinámica del sistema, es decir, ser solución de la ecuación diferencial **3** (o **2**),

$$\boxed{\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\, \cos(\omega_1\, t + \delta_1)} \qquad \textbf{(6)}$$

donde Γ es el coeficiente de amortiguamiento definido en **5**, el cual determina un decaimiento exponencial de la amplitud de oscilación.

La frecuencia angular la hemos notado como ω_1 para diferenciarla de la frecuencia natural del resorte ω_0 (sin disipación), ya que no sabemos de antemano si la frecuencia del sistema concuerda o no con la natural.

*Comentario: Note que la función anterior determina que la oscilación culmina en tiempo infinito, cosa que no ocurre en la realidad. Esto no significa que la función **6** no sea solución de la ecuación diferencial **3**, sino que el modelo de rozamiento es ideal y no describe completamente al sistema real*.

a) Haga un gráfico esquemático de la función **6** y estudie detenidamente que determina cada constante.

b) Verifique que la función definida en **6** es solución de la ecuación diferencial **3** (o **2**), y que la frecuencia de oscilación ω_1, del sistema con rozamiento, no resulta igual a la *frecuencia de oscilación natural del sistema* ω_0, sin rozamiento, sino que queda determinada por la relación,

$$\boxed{\omega_1^{\,2} = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2} \qquad \textbf{(7)}$$

La frecuencia ω_1 resulta siempre menor que la frecuencia natural ω_0,

$$\omega_1 < \omega_0$$

y de acuerdo a la ecuación **7,** observamos que la frecuencia ω_1 disminuye su valor al aumentar el amortiguamiento (coeficiente Γ).

La solución **6** tiene sentido mientras que se cumpla que $\omega_1^{\,2} > 0$, o sea,

$$\omega_1^{\,2} = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 > 0 \qquad \textbf{(8)}$$

es decir, ***si el rozamiento es bajo, la solución resulta oscilatoria***.

De la ecuación **8** vemos que si el coeficiente de amortiguación cumple que,

$$\Gamma < 2\omega_0 \qquad \text{o} \qquad b < 2k \qquad \textbf{(9)}$$

entonces consideramos que el rozamiento es bajo.

*Respuesta: Verificamos que la función $\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\, \cos(\omega_1 t + \delta_1)$ es solución de la ecuación diferencial **3,** para ello calculamos su derivada y su derivada segunda, respecto del tiempo (verifique),*

$$\dot{\Psi}_1(t) = -A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\left[\frac{\Gamma}{2}\, \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_1\, \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1)\right] \qquad \textbf{(10)}$$

$$\ddot{\Psi}_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\left[\left(\frac{\Gamma^2}{4} - \omega_1^{\,2}\right) \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \Gamma\, \omega_1\, \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1)\right] \qquad \textbf{(11)}$$

*reemplazamos **10** y **11** en la ecuación **3** ($\ddot{\Psi}_1(t) + \omega_0^{\,2}\, \Psi_1(t) + \Gamma\, \dot{\Psi}_1(t) = 0$), obtenemos,*

$$A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\left[\left(\frac{\Gamma^2}{4} - \omega_1^{\,2}\right) \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \Gamma\, \omega_1\, \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1)\right] +$$

$$+\omega_0^{\,2} A_1\, e^{-\Gamma\, t/2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) - \Gamma\, A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\left[\frac{\Gamma}{2}\, \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_1\, \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1)\right] = 0$$

simplificamos la constante A_1 y el exponente $e^{-\Gamma t/2}$ y agrupamos todos los términos con cosenos en el miembro izquierdo y todos los términos con senos en el derecho, obtenemos,

$$\left(-\omega_1{}^2+\omega_0{}^2-\frac{\Gamma^2}{4}\right)\cos\left(\omega_1 t+\delta_1\right)=\left[-\Gamma\,\omega_1+\Gamma\,\omega_1\right]\ \mathrm{sen}\left(\omega_1 t+\delta_1\right) \qquad \textbf{(12)}$$

Aquí debemos detenernos a pensar un momento. La función **6** *es solución de la ecuación diferencial* **3** *si la igualdad* **12** *se satisface en todo instante.*

En el miembro izquierdo tenemos una constante multiplicando a una función $\cos\left(\omega_1 t+\delta_1\right)$ *mientras que del lado derecho tenemos otra constante distinta multiplicando a una función* $\mathrm{sen}\left(\omega_1 t+\delta_1\right)$*, con lo cual la igualdad* **12** *dice que el coseno resulta proporcional al seno y* ***la igualdad debe cumplirse para todo tiempo****, lo cual resulta imposible. Pueden concordar en algún instante pero no para todo tiempo (pensarlo detenidamente).*

La igualdad **12** *sólo puede satisfacerse si las constantes que multiplican a las funciones seno y coseno resultan ambas cero (en este caso la constante que acompaña al seno es evidentemente cero), es decir,*

$$\underbrace{\left(-\omega_1{}^2+\omega_0{}^2-\frac{\Gamma^2}{4}\right)}_{\substack{||\\ 0}}\cos\left(\omega_1 t+\delta_1\right)=\underbrace{\left[-\Gamma\,\omega_1+\Gamma\,\omega_1\right]}_{\substack{||\\ 0}}\ \mathrm{sen}\left(\omega_1 t+\delta_1\right) \qquad \textbf{(13)}$$

Y de **13** *obtenemos que para que la función $\Psi_1(t)=A_1\,e^{-\Gamma t/2}\,\cos\left(\omega_1 t+\delta_1\right)$ sea solución de la ecuación* **3** *debe cumplirse que,*

$$-\omega_1{}^2+\omega_0^2-\frac{1}{4}\Gamma^2=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\omega_1{}^2=\omega_0^2-\frac{1}{4}\Gamma^2}$$

que es lo que ya habíamos anticipado en **7,** *el sistema oscila con frecuencia $\omega_1<\omega_0$.*

*Resumiendo, si el amortiguamiento es lo suficientemente débil ($\Gamma<2\omega_0$) como para que $\omega_1{}^2=\omega_0^2-\frac{1}{4}\Gamma^2>0$ (****oscilador débilmente amortiguado****), entonces la evolución del sistema puede ser descripta por la función $\Psi_1(t)=A_1\,e^{-\Gamma t/2}\,\cos\left(\omega_1 t+\delta_1\right)$. Por lo cual el movimiento resulta oscilatorio (no armónico) con frecuencia angular $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{4}\Gamma^2}$ (menor que la frecuencia natural ω_0), y con amplitud de oscilación que decae exponencialmente, decaimiento regido por el valor del coeficiente de amortiguamiento Γ.*

A este tipo de evolución se le conoce con el nombre de ***oscilador débilmente amortiguado*** *(cuando se cumple que $\omega_1{}^2=\omega_0^2-\frac{1}{4}\Gamma^2>0$).*

Para fijar ideas grafiquemos a la función $\Psi_1(t)=A_1\,e^{-\Gamma t/2}\,\cos\left(\omega_1 t+\delta_1\right)$, usando el programa de Mathematica (figura 2):

```
gamma=.2;
w0=1;
w=Sqrt[w0^2-gamma^2/4];
psi[t_]=Exp[-gamma*t/2]*Cos[w*t];
a[t_]=Exp[-gamma*t/2];
```

```
Plot[{psi[t],a[t]},{t,0,50},PlotPoints->500,
PlotRange->{-1.01,1.01},
PlotStyle->{{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.001]},
{RGBColor[1,0,0],Dashing[{.01}],Thickness[0.001]}}]
```

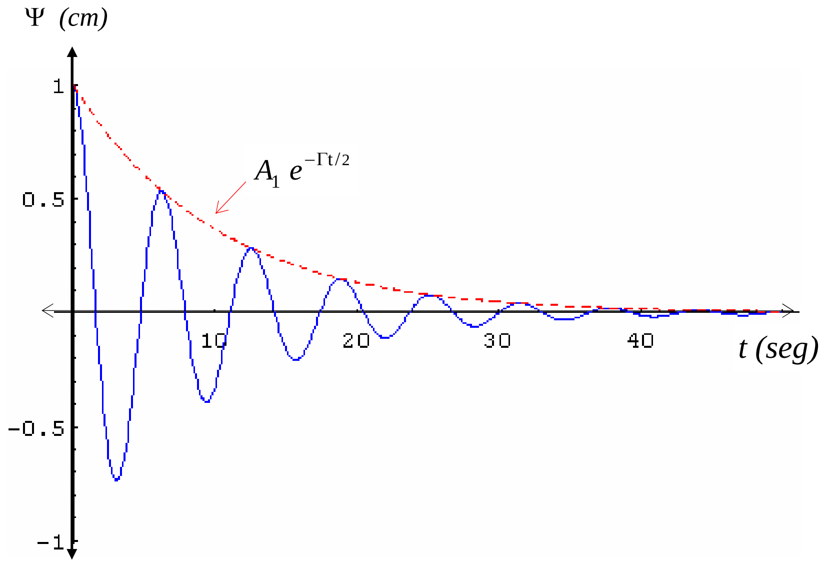


Figura 2: Gráfica de la función $\Psi_1(t) = A_1\ e^{-\Gamma\ t/2}\ \cos(\omega_1 t + \delta_1)$ (oscilador débilmente amortiguado).

donde hemos tomado los valores, $A_1 = 1cm$, $\delta = 0$, $\Gamma = 0.2\ ^1\!/_{seg}$ y $\omega_0 = 1\ ^{rad}\!/_{seg}$.

c) Repita el gráfico, con ayuda del Mathematica, probando con diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento Γ.

d) Suponiendo que el sistema oscila con un período $T_1 = 0{,}32seg$, calcule el coeficiente de amortiguamiento Γ. *Resp.* $\Gamma \cong 7{,}6\ ^1\!/_{seg}$.

e) *Importante.* Sabiendo que inicialmente la masa parte del reposo desplazada de la posición de equilibrio en $5cm$, halle la ley de movimiento $\Psi_1(t)$. ¡Cuidado, en este caso $5cm$ no es la amplitud A_1, como ocurría en el sistema sin rozamiento! (*debe resolver un sistema de dos ecuaciones en donde las incógnitas son la amplitud y la fase y los datos son las condiciones iniciales*).

Resp. $\Psi_1(t) = A_1\ e^{-\Gamma\ t/2}\ \cos(\omega_1 t + \delta_1)$ *con* $A_1 \cong 5.09cm$, $\delta_1 \cong -0{,}191$, $\omega_1 \cong 19{,}63\ ^{rad}\!/_{seg}$ *y* $\Gamma \cong 7{,}6\ ^1\!/_{seg}$

Reobtener la solución con el Mathematica,

```
DSolve[{psi''[t]+400*psi[t]+7.6075*psi'[t]==0,psi'[0]==0,psi[0]==.05},psi[t],t]
```

f) Grafique la posición de la masa en función del tiempo.

g) Halle la energía cinética, potencial y mecánica correspondientes a la masa oscilante en función del tiempo.

h) Grafique la energía total en función del tiempo.

i) Demuestre que (*la demostración es optativa, pero la lectura es recomendada*), si el rozamiento es muy bajo $\Gamma << 2\omega_0$, el valor medio de la energía mecánica durante un ciclo de oscilación es aproximadamente,

$$\boxed{\langle E\rangle \approx \frac{1}{2} m\omega_0^{\ 2} A_1\ e^{-\Gamma t} = E_0\ e^{-\Gamma t}} \qquad \textit{donde} \qquad E_0 = \frac{1}{2} m\ \omega_0^{\ 2} A_1^{\ 2} = \frac{1}{2}\ k A_1^{\ 2} \qquad \textbf{(14)}$$

es decir, en valor medio la energía del sistema disminuye exponencialmente con el tiempo.

El coeficiente Γ determina el grado de disipación de la energía y además define un tiempo característico del sistema. Este tiempo característico lo podemos definir como,

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}} \qquad \textbf{(15)}$$

(*verifique que* Γ *tiene unidades de* $1/_{seg}$).

Cada vez que transcurre un tiempo τ la energía (en valor medio) disminuye un 63%, como puede comprobarse fácilmente a partir de la ecuación **14** y de una tabla de valores,

a $t = 0$ $\quad \langle E \rangle \approx E_0$

a $t = \tau$ $\quad \langle E \rangle \approx E_0 e^{-\Gamma\tau} = E_0 e^{-\Gamma \frac{1}{\Gamma}} = E_0 e^{-1} \cong 0{,}37 E_0$ $\quad$ *disminuye un* 63%

a $t = 2\tau$ $\quad \langle E \rangle \approx E_0 e^{-\Gamma 2\tau} = E_0 e^{-2} \cong 0{,}37^2 E_0 \cong 0{,}137\, E_0$ $\quad$ *vuelve a disminuir un* 63%

Note que transcurrido un tiempo igual a 2τ la energía cayo a casi un décimo de la original. Podemos asignar a τ el nombre de tiempo característico de relajación del sistema (al equilibrio), y representa el tiempo en que el sistema disipa un 63% de su energía.

*Comentario: Por lo visto, el sistema posee varios tiempos que lo caracterizan (**tiempos característicos del sistema**), uno es el tiempo de relajación τ, el otro el período de oscilación del sistema T_1 y por último el periodo natural $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (sin disipación). Conociendo T_1, T_0 y τ resulta posible tener una idea conceptualmente buena de la evolución del sistema.*

Es posible reescribir la condición:

$$\omega_1 < \omega_0 \qquad \textit{como} \qquad T_1 > T_0$$

y la condición de rozamiento débil:

$$\Gamma < 2\omega_0 \qquad \textit{como} \qquad \tau > \frac{T_0}{4\pi}$$

El decaimiento exponencial $e^{-\Gamma t}$ puede reescribirse como $e^{-t/\tau}$.

Muchas de las magnitudes físicas del sistema pueden reescribirse como dependientes de estos tres tiempos.

Saltear en una primera lectura

Respuesta: En el ítem anterior usted halló que la energía mecánica es,

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} k \Psi^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{\Psi}^2 + \omega_0^2 \Psi^2 \right] \qquad \Rightarrow$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m A_1^2 e^{-\Gamma t} \left[\frac{\Gamma^2}{4} \cos^2(\omega_1 t + \delta_1) + \Gamma \omega_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_1^2 \operatorname{sen}^2(\omega_1 t + \delta_1) + \right.$$
$$\left. \omega_0^2 \cos^2(\omega_1 t + \delta_1) \right]$$

El valor medio de la energía mecánica en un ciclo se calcula como,

$$\langle E\rangle = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} E(t)\,dt. \qquad \textit{donde} \qquad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Para calcular el valor medio hacemos una aproximación. Consideramos que el rozamiento es tan bajo $\Gamma << 2\omega_0$ (o $\tau > \frac{T_0}{4\pi}$)*, que la exponencial* $e^{-\Gamma t}$ *se mantiene aproximadamente constante durante todo un ciclo de período* T_1*, o sea, el tiempo que dura una oscilación resulta mucho menor que el tiempo de relajación* $T_1 << \tau$ *y, por consiguiente, la exponencial* $e^{-\Gamma t} = e^{-t/\tau}$ *casi no cambia su valor.*

Dentro de esta aproximación, resulta posible extraer la exponencial $e^{-\Gamma t}$ *fuera de la integral, es decir,*

$$\langle E\rangle \approx \frac{1}{2} m A_1{}^2 e^{-\Gamma t} \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}\left[\frac{\Gamma^2}{4}\cos^2(\omega_1 t+\delta_1) + \Gamma\omega_1\cos(\omega_1 t+\delta_1)\operatorname{sen}(\omega_1 t+\delta_1)\right.$$
$$\left. + \omega_1{}^2 \operatorname{sen}^2(\omega_1 t+\delta_1) + \omega_0{}^2\cos^2(\omega_1 t+\delta_1)\right] dt$$

A partir de esta aproximación, resulta simple hallar el valor medio recordando que,

$$\left\langle \cos^2(\omega_1 t+\delta_1)\right\rangle = \frac{1}{2}, \qquad \left\langle \operatorname{sen}^2(\omega_1 t+\delta_1)\right\rangle = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left\langle \cos(\omega_1 t+\delta_1)\ \operatorname{sen}(\omega_1 t+\delta_1)\right\rangle = 0$$

Con lo cual, el valor medio de la energía resulta,

$$\langle E\rangle \approx \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 A_1{}^2\ \mathrm{e}^{-\Gamma t} = E_0\ \mathrm{e}^{-\Gamma t}$$

donde $E_0 = \frac{1}{2} m\,\omega_0{}^2 A_1{}^2 = \frac{1}{2}\,k\,A_1{}^2$ *(compare con la energía en el sistema sin disipación).*

j) *Optativo.* Halle la variación ΔE, del valor medio de la energía en cada ciclo, en la aproximación de bajo rozamiento. ¿Se mantiene constante el ΔE en los diferentes ciclos?.

Resp. $\Delta E = E_0\left(e^{-\Gamma t} - e^{-\Gamma(t+T_1)}\right) = E_0 e^{-\Gamma t}\left(1 - e^{-\Gamma T_1}\right) \approx \langle E\rangle\,\Gamma\,T_1 = \langle E\rangle \frac{T_1}{\tau}$ *(aproximamos desarrollando a primer orden en Taylor, ya que en ésta aproximación* $T_1 << \tau$*)*

Retomar la lectura

k) *Definición importante*. Se define comúnmente en ingeniería un coeficiente llamado factor *Q*, que da cuenta del grado de disipación del sistema, como,

$$\boxed{Q = 2\pi\langle E\rangle / \Delta \mathrm{E}} \qquad \textbf{(16)}$$

donde ΔE es la energía perdida por período (calculada en el ítem anterior). ***Cuanto mayor resulta Q significa que el sistema disipa una menor fracción de su energía en cada período***. Luego veremos que este factor da cuenta del ancho de banda en sistemas resonantes (ejemplo: receptores de radio).

Demuestre que el factor *Q* vale aproximadamente (con rozamiento bajo),

$$Q \approx \omega_1/\Gamma = 2\pi\,\frac{\tau}{T_1} \qquad \textbf{(17)}$$

es decir, si el tiempo característico de disipación τ es grande respecto al período de oscilación del sistema T_1, entonces el sistema disipa poca energía en cada ciclo, por lo cual el factor *Q* resulta grande.

l) *Optativo.* Halle la potencia disipada en función del tiempo, donde,

$$P = \vec{v}.\vec{F}_a = -v^2 b = -v^2 m\Gamma \qquad \textbf{(18)}$$

verifique que la potencia disipada concuerda con $P = \dfrac{dE}{dt}$ ya que, en el modelo, no hay otra forma en que se pierda o gane energía.

Segundo Caso. Sistema críticamente amortiguado. La solución de la ecuación diferencial **3** es oscilatoria mientras que el amortiguamiento resulta pequeño ($\Gamma < 2\omega_0$). Si el valor de la constante Γ crece suficientemente, hasta un valor crítico, ya no se producen oscilaciones. Ese valor crítico es aquel en donde se satisface que,

$$\omega_1{}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 = 0 \qquad \textbf{(19)}$$

es decir,

$$\boxed{\Gamma_{\text{crítico}} = 2\omega_0} \qquad \textbf{(20)}$$

resultando $\omega_1 = 0$ ("T_1 infinito"), por lo cual, el sistema no oscila.

En estas condiciones la función $\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\, \cos\left(\omega_1 t + \delta_1\right)$ (ec. **6**) ya no es la solución más general de la ecuación diferencial **3.**

Es posible demostrar que la solución general de la ecuación diferencial **3** para el caso de un ***sistema críticamente amortiguado*** es (verifique reemplazando en **3**):

$$\boxed{\Psi_1(t) = e^{-\Gamma\, t/2}\, [B\, t + C]} \qquad \textbf{(21)}$$

donde B y C son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Claramente la función **21** no representa a un sistema oscilando. Para fijar ideas resulta conveniente plantear un ejemplo y graficarlo,

a) Sabiendo que inicialmente la masa parte del reposo desplazada de la posición de equilibrio en $5cm$, halle la ecuación de movimiento $\Psi_1(t)$.

   Resp. $\Psi_1(t) = e^{-\Gamma\, t/2}\, [B\, t + C]$ *con* $\Gamma = 40 \, {}^1\!/_{seg}$, $C = 5cm$ *y* $B = 100 \, {}^{cm}\!/_{seg}$

   Con el Mathematica,

   *DSolve[{psi''[t]+400*psi[t]+40*psi'[t]==0,psi'[0]==0,psi[0]==.05},psi[t],t]*

b) Grafique la posición de la masa en función del tiempo (*Use el Mathematica*).

   Respuesta: Usando el programa de Mathematica (ver figura 3),

```
w0=20;
gamma=2*w0;
b=100;
c=5;
psi[t_]=Exp[-gamma*t/2]*(b*t+c)
Plot[psi[t],{t,0,.4},
PlotPoints->500,PlotRange->{0.01,6},
PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.001]}]
```

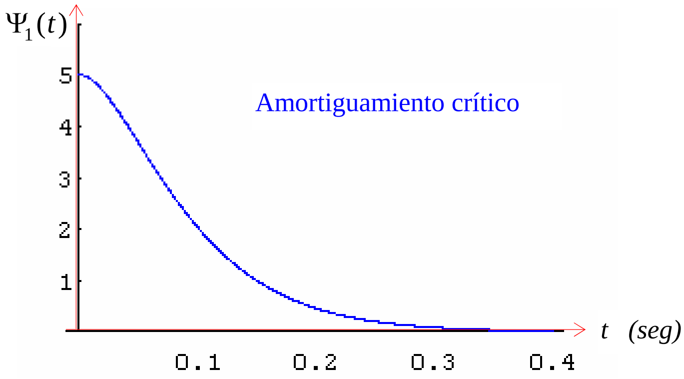


Figura 3: Gráfica de la función $\Psi_1(t) = e^{-\Gamma\, t/2}\,[B\,t + C]$ (amortiguamiento crítico), para el caso particular en que la masa se halla inicilamente desplazada y en reposo.

Pareciera como si el sistema comenzara a evolucionar oscilatoriamente, pero rápidamente se relaja hacia su posición de equilibrio $\Psi_1 = 0$.

Comentario: El sistema cuando posee amortiguamiento crítico relaja a su posición de equilibrio más rápidamente que en cualquier otra situación. Si aumenta el amortiguamiento por sobre el crítico, en lugar de disminuir el tiempo necesario para lograr el equilibrio, éste aumenta (ver el tercer caso). Por esta razón los amortiguadores en máquinas y vehículos se diseñan de tal forma de que el amortiguamiento esté lo más cercano posible a su valor crítico.

Tercer Caso. Sistema sobreamortiguado. Si el coeficiente de amortiguamiento Γ sigue creciendo más halla de su valor crítico,

$$\Gamma > \Gamma_{\text{crítico}} = 2\omega_0, \qquad \textbf{(22)}$$

se cumple que,

$$\omega_1{}^2 = \omega_0{}^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 < 0 \qquad \textbf{(23)}$$

Por supuesto ningún número real al cuadrado puede resultar negativo, por lo cual la ecuación **6** tampoco nos sirve en este caso. Pero si es posible pensar que ω_1 es un número imaginario y ver sí de esta forma resulta posible rescatar la ecuación **6.** Siguiendo este camino, la función coseno se transforma en un coseno hiperbólico, este paso matemático resulta un poco engorroso, por lo cual, no lo haremos aquí. Simplemente afirmamos que la solución general para un sistema sobreamortiguado es:

$$\boxed{\Psi_1(t) = e^{-\Gamma\, t/2}\left[A\, e^{\omega_1' t} + B\, e^{-\omega_1' t}\right]} \qquad \textbf{(24)}$$

donde hemos definido (comparar con **23**)

$$\omega_1' = \left|\,\omega_1\,\right| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}\,, \qquad \textbf{(25)}$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales. Claramente ésta solución no resulta oscilatoria. Veamos un ejemplo,

a) Si el coeficiente de rozamiento es $\Gamma = 100\, {}^1\!/\!_{seg} > \Gamma_{\text{crítico}} = 40\, {}^1\!/\!_{seg}$, y sabiendo que inicialmente la masa parte del reposo desplazada de la posición de equilibrio en $5cm$, halle la ecuación de movimiento $\Psi_1(t)$.

Resp. $\Psi_1(t) = e^{-\Gamma\, t/2}\left[A\, e^{\omega_1' t} + B\, e^{-\omega_1' t}\right]$

con $\omega_1' \cong 45{,}82\, {}^{rad}\!/\!_{seg}$, $A = 5{,}228cm$ *y* $B = -0{,}228cm$.

Note que al ser $\Gamma > \omega_1'$ *la función no diverge (piénselo con detenimiento).*

Con el Mathematica,
*DSolve[{psi''[t]+400*psi[t]+100*psi'[t]==0,psi'[0]==0,psi[0]==.05},psi[t],t]*

b) Grafique la posición de la masa en función del tiempo. *Usando el programa Mathematica (ver figura 4)*:

w0=20;
gamma=100;
w1=Sqrt[gamma^2/4-w0];
a=5.227;
b=–0.228;
*psi[t_]=Exp[-gamma*t/2]*(a*Exp[w1*t]+b*Exp[-w1*t])*
Plot[psi[t],{t,0,20},
PlotPoints->500,PlotRange->{0.01,5.4},
PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.001]}]

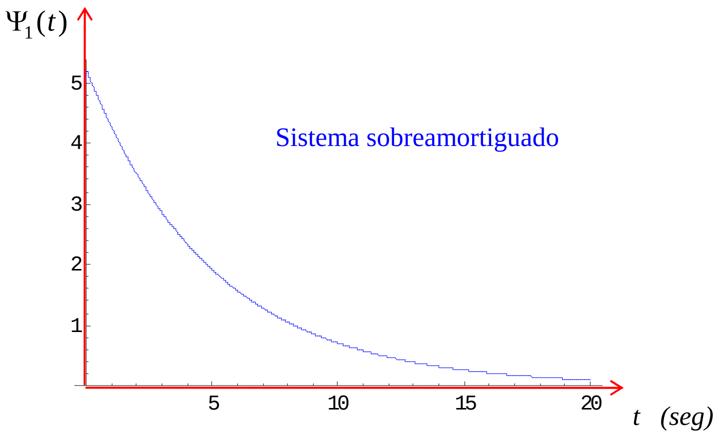


Figura 4: Gráfica de la función $\Psi_1(t) = e^{-\Gamma t/2}\left[A\, e^{\omega_1' t} + B\, e^{-\omega_1' t}\right]$ (Sistema sobreamortiguado).

Observe que el sistema demora mucho más tiempo, en relajarse a su posición de equilibrio, de lo que demora cuando el sistema posee amortiguamiento crítico.

2. Un oscilador (débilmente amortiguado) tiene un período de $3seg$. Su amplitud disminuye un 5% durante cada ciclo.

a) ¿En cuánto disminuye la energía en cada ciclo?. *Resp. disminuye un* $9{,}75\%$ *cada ciclo.*

b) ¿Cuánto vale la constante de tiempo $\tau = \dfrac{1}{\Gamma}$? ¿Cuál es su significado físico?.

Resp. $\tau = 29.24seg$.

c) ¿Cuánto vale el factor Q?, discuta sobre su significado físico. *Resp.* $Q = 61.24$

d) Suponga que inicialmente la masa se halla en el equilibrio con velocidad $v = 1\,{}^{m}\!/_{seg}$. Halle la ley de movimiento del sistema y grafique.

Resp. $\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma t/2} \cos(\omega_1 t + \delta_1)$ *con* $A_1 \cong 0{,}47m$, $\delta_1 \cong -\dfrac{\pi}{2}$,
$\omega_1 \cong 2{,}09\,{}^{rad}\!/_{seg}$ *y* $\Gamma \cong 0{,}034\,{}^{1}\!/_{seg}$.

3. Recomendado. Ejercicio teórico: Oscilación estacionaria bajo una fuerza impulsora armónica. Fenómeno de Resonancia. En el ejercicio teórico 1 hemos agregado a nuestro modelo, de sistema oscilante, la capacidad de disipar energía. Pero aún nos falta incorporar un factor muy importante para la descripción de sistemas físicos reales, la posibilidad de que sobre el sistema se ejerza una fuerza impulsora externa, en principio periódica.

Éste modelo ampliado nos permite entender, por ejemplo, el comportamiento de átomos o moléculas sobre los cuales actúa un campo eléctrico o magnético externo que varía armónicamente (o a una madre hamacando a su hijo).

Un buen ejemplo lo constituye el principio de funcionamiento del horno de microondas. Éste utiliza una onda electromagnética (periódica) para excitar las moléculas del agua y, de esta forma, calentar los alimentos. La frecuencia de microondas concuerda con una de las frecuencias naturales de oscilación de la molécula del agua (***resonancia***), y por ello es que la mayor parte de la energía la absorbe este elemento y no otro (el tapper no se calienta por las microondas si no porque está en contacto con el agua caliente). A este fenómeno lo analizaremos cuando estudiemos ***Resonancia***.

Primeramente estudiaremos el caso más simple en que la fuerza impulsora externa es armónica. Luego comprobaremos que cualquier función periódica (no armónica) puede expresarse como una superposición de funciones armónicas, de esta forma, conociendo el comportamiento de un sistema bajo la acción de una fuerza armónica, va a ser posible obtener información sobre el comportamiento del sistema cuando es sometido a la acción de cualquier fuerza periódica.

Ejemplo: Partimos del modelo planteado en el ejercicio teórico 1**,** donde analizamos la evolución de una masa, sujeta a un resorte, oscilando unidimensionalmente, amortiguada por su interacción con el aire. Usamos los mismos datos, masa $m = 1kg$, constante elástica del resorte $k = 400 N/m$ y longitud relajada $l_0 = 30cm$.

Utilizamos el mismo modelo de amortiguamiento que en el ejercicio teórico 1**,** donde, la fuerza amortiguadora del aire, F_a la consideramos proporcional a la velocidad del cuerpo, pero en sentido opuesto ya que se opone a su movimiento (ley de Stokes), es decir,

$$\vec{F}_a = -b\,\vec{v} \qquad \textbf{(1)}$$

en donde b es una constante que determina el grado de amortiguación (¿cuales son sus unidades?). Supondremos que el amortiguamiento es menor al crítico (ver ejercicio teórico 1).

Vamos a agregar al modelo anterior la posibilidad de que sobre el sistema se ejerza una fuerza impulsora externa armónica. Suponemos que la masa, además de interactuar con el resorte y con el aire, interactúa con otro sistema. Producto de esta interacción sobre la masa se ejerce una fuerza (fuerza impulsora externa) que varía armónicamente con el tiempo:

$$\boxed{F_{ext} = F_0 \cos(\omega\, t)}. \qquad \textbf{(2)}$$

donde F_0 representa la amplitud de la interacción y ω es la frecuencia angular de variación de la fuerza (es posible agregarle una fase inicial, no lo haremos aquí por simplicidad). Supondremos luego que la frecuencia puede variarse según nuestra conveniencia (un ejemplo cotidiano de fuerza periódica, no armónica, lo constituye una madre hamacando a su hijo, la amplitud y la frecuencia de la interacción son determinadas “por el amor de la madre”).

Comentario: La fuerza externa no necesariamente debe ser una fuerza de contacto (la mano de la madre), sino que puede ser debida a un campo eléctrico o magnético externo, que actúa ***a distancia*** *sobre la masa (cargada eléctrica o magnéticamente). De hecho, las fuerzas de contacto pueden describirse a partir de interacciones electromagnéticas y principios cuánticos como el de Pauli (los átomos no se tocan en la forma en que nosotros usamos la palabra tocarse).*

Una vez planteado el modelo del sistema, con sus interacciones, estamos en condiciones de estudiar su evolución dinámica, por ello:

a) A partir de las leyes de Newton obtenga la ecuación diferencial (ecuación dinámica) que describe el desplazamiento de la masa (use **1** y **2**).
Respuesta,

$$m\ddot{\Psi}(t) = -k\Psi(t) - b\dot{\Psi}(t) + F_0\cos(\omega t) \qquad \textbf{(3)}$$

o pasando de miembro y dividiendo por la masa,

$$\boxed{\ddot{\Psi}(t) + \Gamma\,\dot{\Psi}(t) + \omega_0^{\,2}\Psi(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)} \qquad \textbf{(4)}$$

obtenemos una ***ecuación diferencial lineal inhomogénea****, donde $\Psi(t)$ representa el desplazamiento de la masa a partir del equilibrio, en función del tiempo, es decir,*

$$\Psi(t) = x(t) - x_{equi} \quad \text{donde} \quad x_{equi} = l_0 . \qquad \textbf{(5)}$$

Recordar que,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\, {}^{rad}\!/_{seg} \qquad \textbf{(6)}$$

es la frecuencia natural del sistema (frecuencia a la cual oscilaría la masa sin rozamiento y sin fuerza impulsora), y

$$\Gamma = \frac{b}{m} \qquad \textbf{(7)}$$

es el coeficiente de amortiguamiento (ver ejercicio teórico 1).

b) Una vez obtenida la ecuación dinámica **4**, estamos en condiciones de hallar la función $\Psi(t)$ que describe la evolución del sistema en el tiempo. Apelamos nuevamente a nuestra intuición para proponer una solución de la ecuación diferencial **4**. A partir de nuestra experiencia, podemos intuir que, luego de transcurrido un cierto tiempo, el sistema finalmente termina oscilando armónicamente con la misma frecuencia ω que impone la fuerza impulsora. Por ello proponemos, como solución, a la función,

$$\boxed{\Psi_2(t) = A_2\cos(\omega t + \delta_2)} \qquad \textbf{(8)}$$

Verifique que la función $\Psi_2(t)$ es una ***solución particular de la ecuación diferencial* 4,** halle los valores de A_2 y δ_2 *(le hemos puesto el subíndice* 2 *para diferenciarla de la solución que obtuvimos en la ejercicio teórico* 1*, donde el sistema no es impulsado por una fuerza externa).*

Este paso es matemáticamente simple pero muy tedioso, en una primera lectura no haga la cuenta, pero si analice cuidadosamente el resultado final (ecuaciones 9 y 10) y el comentario que sigue.

Ayuda: Repita los pasos que se hicieron en la ejercicio teórico 1 . Pero primero trate de que las funciones armónicas tengan todas el mismo argumento, para ello use la relación,

$$\cos(\omega t) = \cos\left((\omega t + \delta_2) - \delta_2\right) = \cos\left(\omega t + \delta_2\right)\cos\left(\delta_2\right) + \operatorname{sen}\left(\omega t + \delta_2\right)\operatorname{sen}\left(\delta_2\right)$$

Recuerde que si,

$$A\ \cos\left(\omega t + \delta_2\right) = B\ \operatorname{sen}\left(\omega t + \delta_2\right) \qquad \forall t \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 0 \quad y \quad B = 0$$

donde A *y* B *son constantes cualesquiera.*

Use las identidades trigonométricas:

$$\cos\left(\delta_2\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\delta_2\right)}} \qquad si \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \delta_2 \leq 0 \qquad\qquad y$$

$$\cos\left(\delta_2\right) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\delta_2\right)}} \qquad si \qquad -\pi \leq \delta_2 \leq -\frac{\pi}{2}$$

Respuesta,

$$\boxed{A_2 = \frac{F_0}{m}\ \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}}} \qquad \textbf{(9)}$$

y,

$$\boxed{\delta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\Gamma\omega}{\omega^2 - {\omega_0}^2}\right) \qquad con \qquad -\pi \leq \delta_2 \leq 0}, \qquad \textbf{(10)}$$

donde se ha restringido la fase a $-\pi \leq \delta_2 \leq 0$ *para que la amplitud* A_2 *sea siempre positiva.*

Comentario importante: La función $\Psi_2(t) = A_2 \cos\left(\omega t + \delta_2\right)$ *representa una oscilación armónica de frecuencia* ω *, amplitud* A_2 *y fase* δ_2*. Note que* ***la frecuencia*** ω *, de oscilación de la masa,* ***resulta igual a la frecuencia de la fuerza impulsora*** *y que la amplitud* A_2 *y la fase* δ_2 ***no dependen de las condiciones iniciales*** *(como ocurría en el caso del resorte libre), sino que se hallan determinadas a partir de las constantes del sistema (masa, constante elástica, amortiguamiento, intensidad y frecuencia de la fuerza impulsora).*

*Esta solución no puede ser la solución general del sistema. Si el resorte ya está en movimiento y se lo trata de impulsar externamente, en los primeros instantes el movimiento no resulta armónico (**estado transitorio**), y sólo después de transcurrido un tiempo, el sistema logra evolucionar armónicamente con la frecuencia impulsora (**estado estacionario**). La evolución inicial del sistema depende fuertemente de las condiciones iniciales, lo cual **no** se manifiesta en la solución hallada.*

Como ejemplo, piense en la madre hamacando a su hijo. A menos que la frecuencia de la fuerza externa concuerde con la natural del sistema y que tenga mucho cuidado inicialmente al aplicar la fuerza impulsora, con la fase adecuada de tal forma de acompañar el movimiento de la masa, el movimiento inicial no resulta armónico.

c) La función $\Psi_2(t) = A_2 \cos\left(\omega t + \delta_2\right)$, ***no es la solución general*** de la ecuación diferencial **4**, sino simplemente una solución ***particular*** (***solución estacionaria***). Para completar la solución general resulta necesario sumarle la solución de la ecuación homogénea (***transitorio***).

En el capítulo 1 (guía teórica 10) estudiamos que la solución general, de una ecuación diferencial inhomogénea, se halla sumando una solución particular ($\Psi_2(t)$) más la solución de la ecuación homogénea asociada. La ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial **4** es,

$$m\,\ddot{\Psi}_1(t) + b\,\dot{\Psi}_1(t) + k\,\Psi_1(t) = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

la cual, concuerda con la ecuación diferencial que estudiamos en la *ejercicio teórico* 1 (ec. **3**), y representa la evolución del sistema sin fuerza impulsora, y su solución es (ver *ejercicio teórico* 1),

$$\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma t/2}\, \cos\left(\omega_1\, t + \delta_1\right) \qquad \text{donde} \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2} \qquad \textbf{(12)}$$

De esta manera, la solución general de la ecuación diferencial **4** (con fuerza impulsora) resulta,

$$\boxed{\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = A_1\, e^{-\Gamma t/2}\, \cos\left(\omega_1\, t + \delta_1\right) + A_2 \cos\left(\omega\, t + \delta_2\right)} \qquad \textbf{(13)}$$

donde las constantes A_1 y δ_1 ***se hallan a partir de las condiciones iniciales***, mientras que, como ya dijimos, A_2 y δ_2 ***quedan determinadas por las constantes del sistema*** (masa, constante elástica, amortiguamiento, frecuencia impulsora) y no dependen de las condiciones iniciales del sistema.

Verifique que la función $\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t)$ es solución de la ecuación **4**.
Ayuda: ahórrese el trabajo de derivar, básese en el hecho de que ya sabe que $\Psi_1(t)$ satisface la ecuación **11** *y que $\Psi_2(t)$ satisface la ecuación* **4**, *y demuestre entonces que $\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t)$ satisface la ecuación* **4**.

Comentario: La solución general de la ecuación diferencial para el oscilador forzado consta de dos partes, la solución ***transitoria*** *$\Psi_1(t)$ y la solución* ***estacionaria*** *$\Psi_2(t)$. Estos nombres provienen del hecho de que transcurrido cierto tiempo, la solución $\Psi_1(t)$ (transitoria) se hace despreciable ya que la amplitud decrece exponencialmente con el tiempo (debido al amortiguamiento). De este modo, a largo plazo, sólo queda la solución $\Psi_2(t)$ (estacionaria). Esto significa que luego de transcurrido un tiempo corto inicial, el sistema oscila con la frecuencia ω a la que lo obliga a oscilar la fuerza externa (ω puede ser cualquiera, no necesariamente igual a la frecuencia natural del resorte).*

Las constantes de la solución transitoria dependen de las condiciones iniciales y la frecuencia ω_1 es muy parecida a la frecuencia natural del resorte (si el amortiguamiento es bajo). Mientras que la amplitud y la fase de la solución estacionaria dependen de la fuerza externa y no de las condiciones iniciales.

Este fenómeno también es común en circuitos eléctricos donde intervienen bobinas y capacitores. Es sabido que cuando encendemos o apagamos un circuito, como por ejemplo una heladera, la corriente que circula inicialmente puede ser muy superior a la corriente estacionaria que se alcanza una vez terminado el transitorio, hasta 7 veces mayor, por ello los cables deben dimensionarse para soportar corrientes mayores que las necesarias en el estado estacionario (las potencias que se indican en los artefactos, tales como lámparas o amplificadores, son las que consumen en estado estacionario).

d) Para fijar ideas hallemos $\Psi(t)$, para el caso particular en que el resorte inicialmente está estirado $5cm$ y en reposo, e impulsado por una fuerza externa armónica de intensidad $F_0 = 5N$ y frecuencia $\omega = 25 \,{}^{rad}\!/\!_{seg}$ (recuerde que $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 20\,{}^{rad}\!/\!_{seg}$).

Suponga que el coeficiente de rozamiento es $b = 1\,{}^{kg}\!/\!_{seg}$ ($\Rightarrow$ $\Gamma = \dfrac{b}{m} = 1\,{}^{1}\!/\!_{seg}$).

Con estos datos hallamos la solución general del sistema, que sabemos tiene la forma,

$$\Psi(t) = A_1\, e^{-\Gamma\, t/2} \cos(\omega_1\, t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega\, t + \delta_2)$$

Primero calculamos la amplitud A_2 y la fase δ_2, que no dependen de las condiciones iniciales,

$$-\pi \le \delta_2 \le 0 \quad y \quad \delta_2 = \operatorname{arctg}\left[\frac{\Gamma\omega}{\omega^2 - {\omega_0}^2}\right] \cong -3{,}031$$

(note que debe pasar el resultado al cuarto cuadrante),

y $$A_2 = \frac{F_0}{m}\,\frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}} \cong 0{,}022m = 2{,}2cm$$

Luego (a partir de **12**) calculamos la frecuencia ω_1,

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2} \cong \omega_0 = 20\,{}^{rad}\!/\!_{seg}$$

Planteemos las condiciones iniciales,

$$\Psi(0) = A_1 \cos(\delta_1) + A_2 \cos(\delta_2) = 5cm \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_1 \cos(\delta_1) = 5cm + 2{,}186cm = 7{,}186cm}$$

$$\dot{\Psi}_1(0) = -A_1\left[\frac{\Gamma}{2}\cos(\delta_1) + \omega_1 \operatorname{sen}(\delta_1)\right] - A_2\omega \operatorname{sen}(\delta_2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{A_1\left[0{,}5\,{}^{1}\!/\!_{seg} \cos(\delta_1) + 20\,{}^{1}\!/\!_{seg} \operatorname{sen}(\delta_1)\right] = -A_2\omega \operatorname{sen}(\delta_2) = 6{,}07\,{}^{cm}\!/\!_{seg}}$$

Hemos obtenido dos ecuaciones con dos incógnitas A_1 y δ_1. Compruebe que despejando se obtiene,

$$A_1 \cong 7{,}187cm \quad \text{y} \quad \delta_1 \cong 0{,}01723$$

Por consiguiente la función que describe la evolución dinámica del sistema es,

$$\Psi(t) = A_1\, e^{-\Gamma\, t/2} \cos(\omega_1\, t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega\, t + \delta_2)$$

con $A_2 \cong 2{,}2cm$, $\delta_2 \cong -3{,}031$, $\omega = 25\,{}^{rad}\!/\!_{seg}$, $A_1 \cong 7{,}187cm$, $\delta_1 \cong 0{,}01723$ y $\omega_1 \cong 20\,{}^{rad}\!/\!_{seg}$.

e) *Vuelva a hallar $\Psi(t)$ con el programa Mathematica,*

```
Simplify[DSolve[{psi''[t]+400*psi[t]+psi'[t]==5*Cos[25*t],
psi'[0]==0,psi[0]==.05},psi[t],t]]
```

(¡ojo!, la solución dada por el Mathematica puede aparecer un poco más complicada, usted debe agrupar para poder comparar con la solución anterior)

f) Grafique $\Psi(t)$ y discuta. *Con el programa Mathematica (ver figura 5),*

```
gamma=1;
a1=7.187;
d1=0.01723;
w1=20;
a2=2.2;
d2=-3.031;
w=25;
psi1[t_]=a1*Exp[-gamma*t/2]*Cos[w1*t+d1];
psi2[t_]=a2*Cos[w*t+d2];
Plot[psi1[t]+psi2[t],{t,0,12},
PlotPoints->500,PlotRange->{-10,10},
```

Axes->True,AspectRatio->.6,
PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.001]}]

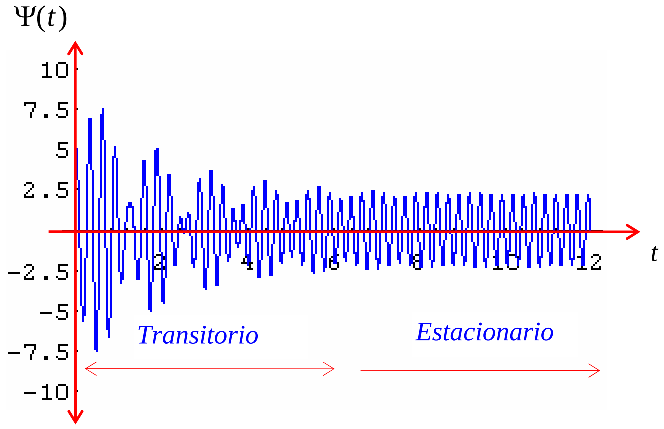


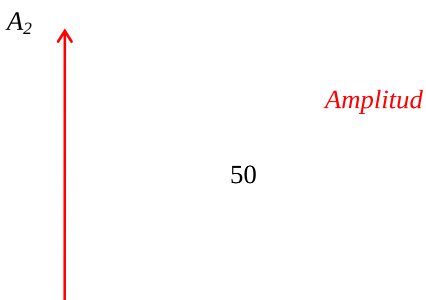
Figura 5: Gráfico de la función Ψ. Estado transitorio y estacionario del sistema.

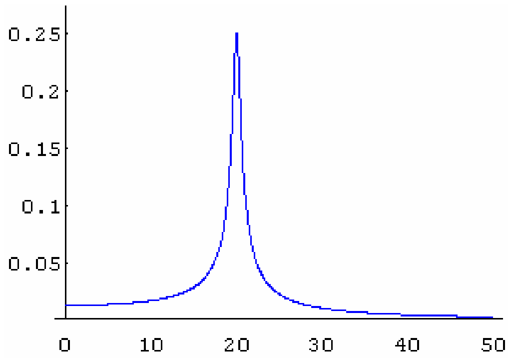
En la figura 5 observamos claramente que, **luego de transcurridos los primeros instantes** (alrededor de $6seg$), **el término transitorio decae completamente y sólo queda el término estacionario**.

En los próximos ítems sólo estudiaremos al sistema cuando ya ha alcanzado el estado estacionario, es decir el transitorio se ha disipado completamente, lo cual ocurre cuando el tiempo transcurrido es mayor que el tiempo de relajación,

$$\boxed{t >> \tau = \frac{1}{\Gamma}} \qquad \textbf{(14)}$$

g) *Importante*. Ahora queremos analizar la respuesta del sistema para diferentes frecuencias de la fuerza impulsora (igual intensidad F_0). Para ello, grafique la amplitud de oscilación A_2 y la fase δ_2 en función de la frecuencia impulsora ω, use los datos del ítem anterior. Analice lo que sucede en el límite de $\Gamma \to 0$, ¿sigue siendo bueno el modelo en ese límite? ¿aguanta el resorte? . Discuta.
Respuesta, con el programa Mathematica (ver figura 6 y 7),
m=1;
gamma=1;
w0=20;
f0=5;
*a2[w_]=(f0/m)*1/Sqrt[(w^2-w0^2)^2+gamma^2*w^2];*
Plot[a2[w],{w,0,50},
*PlotPoints->500,PlotRange->{0,1.1*f0/w0},*
Axes->True,AspectRatio->0.7,
PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.001]}];






```
f[w_]=g*w/(w^2-w0^2);
y[w_]=1;
x[w_]=1/f[w];
r[w_]=Sqrt[x[w]^2+y[w]^2];
yy[w_]=y[w]/r[w];
xx[w_]=x[w]/r[w];
d2[w_]=ArcTan[xx[w],yy[w]]-Pi;
Plot[d2[w],{w,0,50},
Axes->{True,False},AspectRatio->.4,
PlotPoints->500,PlotRange->{0,-3.15},
PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.001]}]
```

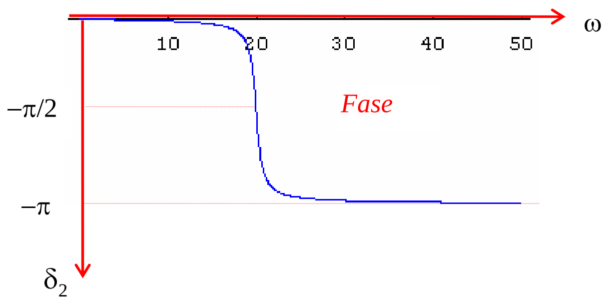


Figura 7: Gráfico de la fase δ_2, en función de la frecuencia impulsora ω.

Note que la oscilación alcanza una mayor amplitud cuando la frecuencia de la fuerza impulsora ω resulta cercana a la frecuencia natural del sistema $\omega_0 = 20\,{}^{rad}\!/_{seg}$, mientras que cuando difiere mucho de esta frecuencia la amplitud disminuye fuertemente, a este fenómeno se lo conoce con el nombre de ***resonancia***.

La frecuencia a la que exactamente aparece el máximo de amplitud es (verifique):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \frac{\Gamma^2}{2}} \approx \omega_0 \qquad si \qquad \Gamma \textit{ es pequeño} \qquad \textbf{(15)}$$

Observe también que la fase δ_2 varía abruptamente cerca de la resonancia, y que en resonancia, toma el valor,

$$\delta_2 = -\frac{\pi}{2} \qquad \textit{(en resonancia).} \qquad \textbf{(16)}$$

Luego analizaremos el significado físico de esta última igualdad.

Comentario: En el problema **4** *calcularemos el valor medio de la potencia entregada por la fuerza impulsora, y comprobaremos que el resorte absorbe la mayor cantidad de potencia (trabajo en la unidad de tiempo) cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es exactamente la frecuencia natural del sistema (**frecuencia de resonancia**),*

$$\omega = \omega_0 \qquad \textit{(frecuencia de resonancia)} \qquad \textbf{(17)}$$

El gráfico que obtendremos del valor medio de la potencia entregada por la fuerza impulsora en función de la frecuencia ω se muestra en la figura 8.

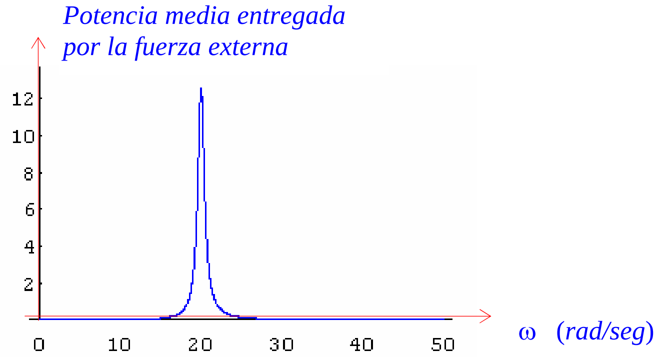


Figura 8: Gráfico de la potencia media entregada por la fuerza externa, en función de la frecuencia ω

donde claramente se observa lo pronunciado del pico de potencia.

El concepto de resonancia se asocia con la existencia de condiciones apropiadas para la transferencia de energía de un sistema a otro.

En nuestro ejemplo de la masa, unida a un resorte, impulsada por una fuerza externa, se logra una mayor transferencia de energía cuando la frecuencia ω concuerda con la frecuencia natural del sistema ω_0. Cuando la fuerza varía armónicamente con esa frecuencia, entrega permanentemente energía al sistema, ya que la fuerza acompaña permanentemente al movimiento de la masa, compensando exactamente la energía disipada por rozamiento.

Si la frecuencia ω no es igual a ω_0, no siempre la fuerza externa entrega energía, en algunos momentos puede llegar a oponerse al movimiento de la masa y por ende quitarle energía y en otros momentos acompañar el movimiento entregándole energía.

El ejemplo de la madre hamacando a su hijo puede resultar ilustrativo, aunque la fuerza no resulte armónica. La madre, sin tomar conciencia de ello, hamaca a su hijo con la frecuencia de resonancia logrando así un mejor aprovechamiento de su energía. Mi hija Gabriela en ocasiones hamaca a mi otro hijo Fede, pero aún no ha logrado aprender la mejor manera de aprovechar su energía. Muchas veces empuja la hamaca antes de que ésta haya llegado a su máximo desplazamiento, por lo cual, en lugar de acelerarla la frena, quitándole energía, y por consiguiente Gabi sufre un empujón hacia atrás. En su inconsciente aún no se ha internalizado el fenómeno de resonancia.

Podemos extender el concepto de resonancia a muchos procesos en los cuales hay condiciones favorables para la transferencia de energía de un sistema a otro.

Quizás el ejemplo más familiar de resonancia sea lo que sucede cuando sintonizamos una radio en una determinada estación radioemisora. Todas las estaciones radioemisoras están produciendo todo el tiempo oscilaciones forzadas en el circuito receptor (oscila la corriente eléctrica). Pero, para cada posición del sintonizador, corresponde una frecuencia natural de oscilación del circuito eléctrico receptor. Cuando esta frecuencia coincide con aquella de la radio emisora, la energía absorbida es máxima, y por ello es la única estación que podemos oír. Si dos estaciones tienen frecuencias muy próximas, algunas veces las oímos simultáneamente, lo que da lugar a un efecto de interferencia.

La energía que absorbe un átomo de un campo eléctrico oscilante es máxima cuando la frecuencia del campo coincide con una de las frecuencias naturales del átomo. Como por ejemplo el caso del horno microondas, en donde la frecuencia (de microondas) utilizada coincide con una de las frecuencias naturales de vibración de la molécula de agua. Es posible hallar resonancias en reacciones nucleares y en procesos que tienen lugar entre partículas elementales. El concepto de resonancia juega un papel importante en la descripción de muchos fenómenos físicos.

h) ¿Cuánto vale la fase δ_2 en resonancia ($\omega = \omega_0$)?. *Resp.* $\delta_2 = -\frac{\pi}{2}$.

i) *Importante*. Analice el significado físico del resultado $\delta_2 = -\frac{\pi}{2}$, compare la velocidad de la masa $\dot{\Psi}_2(t)$ con la $F_{ext} = F_0 \cos(\omega\, t)$.

Respuesta:

La velocidad de la masa la obtenemos derivando la función $\Psi_2(t)$,

$$\dot{\Psi}_2(t) = -\omega A_2 \,\text{sen}(\omega t + \delta_2)$$

y en resonancia $\delta_2 = -\frac{\pi}{2}$, *por ende,*

$$\dot{\Psi}_2(t) = -\omega A_2 \,\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega A_2 \cos(\omega t)$$

por lo cual, ***en resonancia, la velocidad se halla en fase con la Fuerza impulsora, ya que ambas son proporcionales a la función coseno.***

La máxima transferencia de potencia se logra cuando la fuerza externa se halla en fase con la velocidad de la masa oscilante (pensar en una madre hamacando a su hijo, que empuja acompañando el desplazamiento).

j) Calcule la energía mecánica total del oscilador.

Resp. $$E_{total}(t) = \frac{1}{2} A_2^{\,2} m \left[\omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos^2(\omega t + \delta_2)\right],$$

Comentario: note que tiene dependencia temporal, ¿qué significa esto?.

k) Grafique cualitativamente la energía en función del tiempo, observe su variación en el tiempo y discuta.

l) Demuestre que ***en resonancia la energía total se mantiene constante***, independiente del tiempo. Interprete físicamente.

Respuesta: $E_{total}(t)=\frac{1}{2}A_2{}^2 m\,\omega_0^2=\frac{1}{2}k\,A_2{}^2$

m) Demuestre que fuera de resonancia la energía total se mantiene en promedio constante en el tiempo. Interprete físicamente.

Ayuda: $\langle E(t)\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T E(t)\,dt=\frac{1}{2}A_2{}^2 m\left[\omega^2+\frac{1}{2}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\right]=\frac{1}{2}A_2{}^2 m\frac{\omega^2+\omega_0^2}{2}$

> *Comentario: En promedio, en cada ciclo, la energía total del oscilador se mantiene constante, pero, fuera de la resonancia se encuentra aumentando y disminuyendo armónicamente.*
>
> *Fuera de la resonancia, la fuerza impulsora en momentos no alcanza a entregarle, al sistema, la energía que disipa por rozamiento y hasta llega a quitarle energía, y en otros momentos pasa lo contrario, es decir, le entrega más de lo que el sistema disipa. En promedio, la energía no varía en un ciclo (en el estado estacionario).*

n) Calcule la potencia instantánea cedida por la fuerza externa impulsora al oscilador.

Ayuda: $P_{ext}(t)=\vec{v}(t).\vec{F}_{ext}(t)$.

Respuesta:

$$P_{ext}(t)=-\omega A_2 F_0\,\text{sen}(\omega t+\delta_2)\cos(\omega t)=-\frac{F_0^2}{m}\frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+\Gamma^2\omega^2}}\text{sen}(\omega t+\delta_2)\cos(\omega t)$$

o) Calcule la potencia instantánea disipada por la fuerza amortiguadora.

Ayuda: $P_a(t)=\vec{v}(t).\vec{F}_a(t)=-bv(t)^2$.

p) Analice la validez de la igualdad $\frac{dE(t)}{dt}=P_{ext}(t)+P_a(t)$. Justifique. Si tiene mucho tiempo verifique la igualdad.

q) Verifique que en resonancia ($\omega=\omega_0$) la potencia $P_{ext}(t)=-P_a(t)$.

> *Comentario:* ***En resonancia la potencia instantánea entregada por la fuerza impulsora se equipara con la potencia disipada en cada instante****, por consiguiente* $\frac{dE(t)}{dt}=P_{total}(t)=P_{ext}(t)+P_a(t)=0$.

r) *Importante*. Escriba un comentario o resumen de los conceptos más importantes aprendidos en el ejercicio.

4. Recomendado. Curva de resonancia. Este problema es continuación del problema **3,** en él queremos asociar el concepto de resonancia con la existencia de condiciones apropiadas para la transferencia de energía de un sistema a otro.

Comentario: El objetivo principal del problema es obtener la expresión dada en el último ítem, si decidiera no hacer las cuentas (¡sabia decisión!), como mínimo, analice la expresión y grafique $\langle P_{ext}\rangle$ en función de la frecuencia impulsora ω.

a) Calcule la potencia media cedida por la fuerza impulsora, es decir el promedio de la potencia P_{ext} en un ciclo, use la expresión de la potencia externa hallada en el ítem *n)* del ejercicio anterior, es decir,

$$P_{ext}(t) = -\omega A_2 F_0 \,\mathrm{sen}(\omega t + \delta_2)\cos(\omega t) = -\frac{F_0^2}{m}\,\frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}}\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta_2)\cos(\omega t)$$

Ayuda: $\langle P_{ext}\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P_{ext}(t)\,dt$. donde $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Use la identidad trigonométrica $\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\,\mathrm{sen}(b)$, *y que*

$$\langle \cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}. \quad \text{y} \quad \langle \cos(\omega t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\,dt = 0$$

Respuesta:

$$\langle P_{ext}\rangle = -A_2\omega F_0\,\mathrm{sen}(\delta_2) = -\frac{F_0^2}{2m}\,\frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}}\,\mathrm{sen}(\delta_2)$$

Del problema anterior sabemos que,

$$\delta_2 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\Gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0{}^2}\right) \qquad con \qquad -\pi \le \delta_2 \le 0$$

Resulta fácil demostrar que,

$$\mathrm{sen}(\delta_2) = -\frac{\Gamma\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}}$$

y usando esta expresión reescribimos el valor de la potencia impulsora media como:

$$\boxed{\langle P_{ext}\rangle = \frac{F_0^2}{2m}\,\frac{\Gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}}$$

b) ***Recomendado:*** Grafique $\langle P_{ext}\rangle$ en función de la frecuencia impulsora ω, use los datos dados en el problema anterior. ¿A qué frecuencia la potencia media impulsora es máxima?.

c) Calcule el valor de $\langle P_{ext}\rangle_{max}$. *Resp.* $\langle P_{ext}\rangle_{max} = \dfrac{F_0^2}{2\Gamma m}$, *cuando* $\omega = \omega_0$.

d) Llamando $P_0 = \langle P_{ext}\rangle_{max}$, reescriba $\langle P_{ext}\rangle$ en función de P_0.

Resp. $$\boxed{\langle P_{ext}\rangle = P_0\,\frac{\Gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}}.$$

Comentario: El gráfico de la potencia media entregada al sistema como función de la frecuencia ω*, se obtiene a partir del programa Mathematica (ver figura 9),*

```
m=1;
gamma=1;
w0=20;
f0=5;
p0=f0/(2*gamma*m))
p[w_]=p0*gamma^2*w^2/((w^2-w0^2)^2+gamma^2*w^2);
Plot[p[w],{w,0,50},
PlotPoints->500,PlotRange->{0,1.1*p0},
Axes->True,AspectRatio->0.7,
PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.001]}];
```

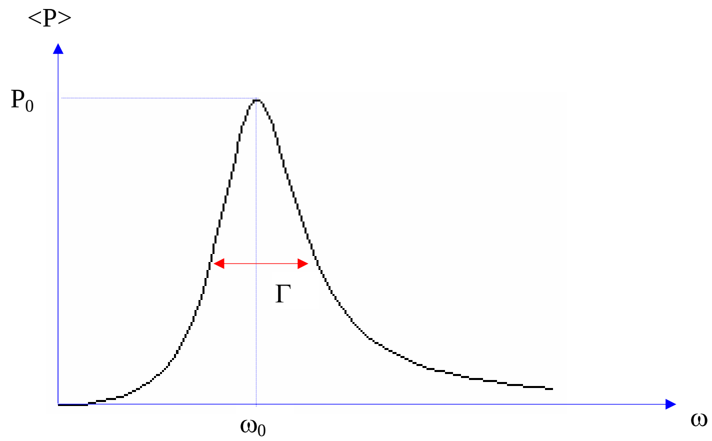


Figura 9: Gráfico de la potencia media entregada por la fuerza externa, en función de la frecuencia ω

donde claramente se observa que el sistema absorbe el máximo de energía cuando la frecuencia externa concuerda con la frecuencia natural del sistema. Cerca de esa frecuencia la potencia absorbida es alta. El ancho de la curva depende de la constante de amortiguamiento Γ*, como veremos en el ejercicio siguiente.*

En sintonía de estaciones radiales, ese ancho se conoce con el nombre de ancho de banda. Si quisiéramos tener una sintonía muy selectiva a la frecuencia emisora deberíamos disminuir ese ancho. En un circuito eléctrico la constante de amortiguamiento Γ *está relacionada con la resistencia eléctrica.*

e) *Importante.* Escriba un comentario o resumen de los conceptos más importantes aprendidos en el ejercicio.

5. Como mínimo leerlo. Este problema es continuación de los problemas **3** y **4.** Queremos relacionar el ancho de la curva de resonancia (gráfico de $\langle P_{ext} \rangle$) con la constante de amortiguación $\Gamma = b/m$, y con el valor del factor Q cuando la resonancia es aguda.

Para estudiar el ancho de la curva de resonancia,

a) Verifique que los valores de ω para los cuales $\langle P_{ext} \rangle$ vale la mitad de $P_0 = \langle P_{ext} \rangle_{max}$ satisfacen la ecuación: $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \Gamma^2 \omega^2$

b) Verifique (reemplazando en la expresión anterior) que los valores de ω para los cuales la potencia media vale la mitad de P_0 son aquellos que cumplen $\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma\omega$ y que las dos soluciones positivas son,

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} + \frac{1}{2}\Gamma \,. \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} - \frac{1}{2}\Gamma$$

Se llama ancho completo de frecuencia a potencia semimáxima, o simplemente *ancho completo de resonancia* a $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. Demostrar que $\Delta\omega = \Gamma = \frac{1}{\tau}$, donde τ es tiempo medio de decaimiento definido en el problema **1**.

> *Comentario: Hemos encontrado una relación muy importante entre el ancho completo de resonancia para oscilaciones forzadas y el tiempo de decaimiento para oscilaciones libres:*
>
> $$\boxed{\Delta\omega . \tau_{\text{libre}} = 1}$$
>
> *este resultado es muy general. Se cumple no sólo para sistemas de un grado de libertad, sino también para sistemas de muchos grados de libertad.*

c) **Analice el significado físico de este último hecho,** analice como varía el ancho de la curva en función de la intensidad de la amortiguación.
d) En el problema **1** *se* demostró que, para un oscilador libre amortiguado, el factor Q_{libre} vale,

$$Q_{libre} = \omega m / b = \omega / \Gamma$$

e) En curvas de resonancia agudas (amortiguamiento pequeño), podemos aproximar $\omega \approx \omega_0$. Usando esta aproximación muestre que,

$$\boxed{Q_{libre} \cong \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

es una medida de la agudeza de la curva de resonancia.

6. Repaso. Un objeto de $m = 2kg$ oscila sobre un muelle de constante elástica $k = 400 N / m$. La constante de amortiguamiento es $b = 2kg / seg$. Está impulsada por una fuerza sinusoidal de valor máximo $10N$ y frecuencia angular $\omega = 10 rad / seg$.
a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones estacionarias?
b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia?.
c) Hallar la amplitud de las vibraciones en resonancia.
d) ¿Cuál es la ancho $\Delta\omega$ de la curva de resonancia?

7. Recomendado. Se puede ejercer una fuerza externa, sobre un objeto sujeto a un muelle, desplazando el soporte hacia arriba y hacia abajo, como se muestra en la figura 10.

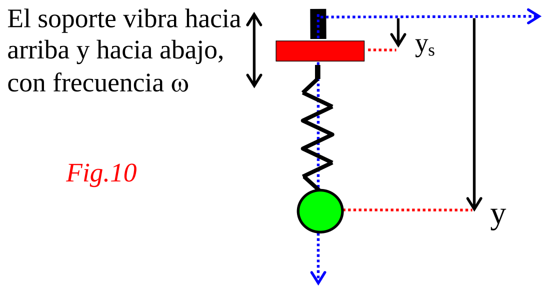


Fig.10

La masa $(m = 1kg)$ cuelga del soporte móvil por medio de un resorte de constante elástica $k = 400 N / m$ y longitud relajada de $l_0 = 10cm$.

Supondremos que el soporte posee un movimiento oscilatorio armónico, de frecuencia ω y amplitud Δy_s, descripto por la ecuación: $y_s(t) = \Delta y_s \cos(\omega t)$.

Suponiendo que el rozamiento puede despreciarse,
a) *Importante.* Plantee la ecuación dinámica del sistema.
Resp. $m\ddot{y} = -k(y - y_s - l_0) + mg = -k(y - \Delta y_s \cos(\omega t) - l_0) + mg \quad \Rightarrow$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}(y - l_0) - g = \frac{k}{m}\Delta y_s \cos(\omega t)$$

b) Verifique que la siguiente función es solución de la ecuación diferencial anterior:

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta) + B\cos(\omega t) + y_{equi}$$

donde, $y_{equi} = l_0 + \dfrac{mg}{k}$, $B = \dfrac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\Delta y_s$, mientras que A y δ son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

c) Compare la ecuación dinámica y su solución con la analizada en el ejercicio 3. Discuta.

d) Suponiendo que a $t = 0$ la masa parte del reposo desde la posición de equilibrio y_{equi}, demuestre que la evolución dinámica de la masa se describe por:

$$y(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\Delta y_s \left[-\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega t)\right] + y_{equi}$$

Analice lo que sucede cuando la frecuencia de excitación ω es cercana a la natural ω_0. *Ayuda: Use que (verifique),*

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0 - \omega} = t\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

Usando esto compruebe que,

$$y(t) \xrightarrow[\omega \to \omega_0]{} \frac{\omega_0}{2}\Delta y_s\ t\ \mathrm{sen}(\omega_0 t) + y_{equi}$$

Analice detenidamente este resultado y compare con lo hallado en el ejercicio 3. Grafique.

8. Optativo. Circuito RLC. Con este ejercicio queremos enfatizar que el fenómeno de resonancia trasciende al sistema masa-resorte. Comprobaremos que en un circuito eléctrico *RLC* alimentado con un generador de corriente alterna (formado por una resistencia una bobina y un capacitor), la carga eléctrica evoluciona según una ecuación dinámica equivalente a la estudiada en el sistema masa-resorte. El circuito *RLC* que estudiaremos se muestra en la figura 11.

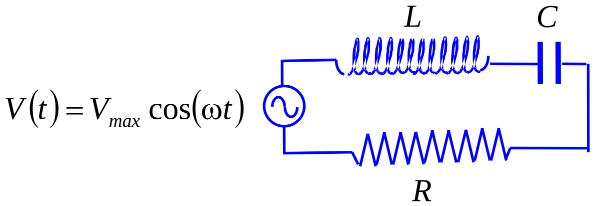


Fig.11

a) Plantee a partir de la ley de Kirchoff, la ecuación diferencial que rige la evolución de la intensidad de corriente eléctrica *I*.

Resp. $L\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{Q}{C} + IR = V_{\max}\cos(\omega t)$ *o reemplazando* $I = \dfrac{dQ}{dt}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{L\frac{d^2Q}{dt} + \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = V_{\max}\cos(\omega t)}$$

b) La ecuación diferencial anterior resulta equivalente a la ecuación dinámica del sistema masa-resorte. Determine la equivalencia entre cada una de las variables, por ejemplo, ¿quién hace las veces de masa en el circuito eléctrico? ¿Cuál de constante elástica?. A partir de su conocimiento del sistema masa-resorte, discuta sobre la evolución del sistema eléctrico.

c) Muestre que la frecuencia de resonancia del circuito es $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$. Discuta.

Bibliografía:

- *Física, Mecánica, ondas y termodinámica Vol. 1*, **D.E.Roller and R.Blum**. Ed. Reverté**.**
- *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas*. **U. Ingard y W.L. Kraushaar**, Ed. Reverté.
- *Física Vol. 1*, **Tipler**. Ed. Reverté.
- *Física*, **Gettys, Keller, Skove**. Mc Graw Hill.
- *Física, Mecánica Vol. 1,* **M. Alonso y E.J. Finn,** Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.
- *Curso de Física de Berkeley*, *Mecánica, Vol. 1* Ed. Reverté.
- *Curso de Física de Berkeley*, *Oscilaciones y Ondas, Vol. 3* Ed. Reverté.
- *Física Vol. 1*, **Feynman**. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.