Capítulo 1.

Oscilaciones libres de sistemas con un grado de libertad.

Introducción: Aunque parezca muy aburrido, en los primeros capítulos del texto, sólo estudiaremos el movimiento de una partícula moviéndose periódicamente debido a la acción de un resorte, o el balanceo de un péndulo. Estos son ejemplos simples que no tienen gran interés por si mismos, sino que representan un prototipo o modelo de fenómenos físicos más complejos cuyo comportamiento puede modelarse a través de ellos.

En la Naturaleza no todo fenómeno oscilatorio tiene un comportamiento tan regular como el del resorte o el péndulo pero, veremos luego que, estas oscilaciones más complejas pueden describirse como la superposición de oscilaciones simples.

Ejemplos de sistemas que presentan oscilaciones se encuentran en muchas áreas de la física, de la ingeniería, de la química y también de la biología.

Un ejemplo común de evolución oscilatoria se encuentra en los fenómenos ondulatorios, tales como, las ondas de sonido, las ondas en el agua, vibraciones en instrumentos musicales, ondas electromagnéticas (ondas de luz). En ingeniería, vibraciones en materiales, puentes y edificios.

Otros ejemplos, un poco más obscuros, son las vibraciones moleculares, atómicas o nucleares, asociadas con la emisión de ondas luminosas. Estos fenómenos se estudian en el marco de la Teoría Cuántica, la cual nos da una nueva visión de la naturaleza hablándonos sobre la "*dualidad onda-partícula*". Dentro del marco de esta teoría, las partículas ya no se comportan como pelotitas, que es como uno ingenuamente se las imagina, sino que en ciertas experiencias se manifiestan con características ondulatorias mientras que en otras lo hacen como partículas. Este tipo de fenómenos contradice nuestro preconcepto de la realidad, no esperamos que un electrón se comporte como una onda, pero hasta el momento toda la evidencia experimental existente no hace más que confirmar, con mucha exactitud, las predicciones de la teoría cuántica.

Con lo expuesto, esperamos transmitir la importancia que en física tiene el estudio de sistemas cuya evolución resulta oscilatoria. Comenzaremos estudiando sistemas simples e idealizados (irreales), que contribuyen a formarnos una primera idea del comportamiento de los sistemas reales más complejos.

Los ejercicios recomendados son el 7, 8,11, 12, 13, 14, 16 y 17.

1. Guía teórica. Dinámica: En cursos anteriores nos hemos familiarizado con las leyes de Newton y hemos analizado una gran variedad de hechos físicos que son explicados a través de ellas, como por ejemplo: el movimiento planetario, trayectorias de proyectiles, el giro de un trompo, etc. Estos tipos de problemas se enmarcan dentro de una temática mucho más general, que excede el ámbito de la física, la ***Dinámica.***

La dinámica se ocupa de estudiar sistemas que evolucionan con el transcurso del tiempo, cambian. Algunos ejemplos de sistemas dinámicos pueden ser:

- El movimiento de una partícula (o un planeta). Evoluciona en cuanto se produce algún cambio en la posición y la velocidad.

- La evolución de un sistema formado por muchas partículas en interacción (gas, sólido, fluido).
- La evolución climática. Las modificaciones producidas en la capa de ozono, etc.
- Un sistema formado por distintos compuestos químicos, reaccionando, cambiando las concentraciones de cada uno de ellos o formándose nuevos.
- Un sistema formado por una población de bacterias. Podría interesar conocer como evoluciona la población ante determinadas condiciones ambientales.
- Un sistema formado por diferentes actores económicos intercambiando bienes. La evolución podría llevar a sistemas en crecimiento, empobrecimiento, inflación, deflación, etc.
- Etc.

En todos estos ejemplos, interesa predecir el comportamiento del sistema, saber si evolucionará hacia estados estables o de equilibrio, hacia estados con variaciones periódicas u oscilatorias (ciclos), o hacia estados más complejos o caóticos.

Para comenzar a comprender las leyes que rigen la evolución dinámica de un sistema, en ocasiones es posible plantear modelos matemáticos (por ejemplo: ecuaciones diferenciales) que brindan una predicción teórica sobre la evolución del sistema, conocido su estado actual (estado inicial).

Entre la comunidad de los físicos existe la firme creencia de que las leyes de la Naturaleza pueden ser escritas en lenguaje matemático. Esto podría no ser así, pero hasta el momento la física ha tenido un extraordinario éxito en explicar los fenómenos naturales por este camino, y nadie conoce otro.

Como sabemos, los sistemas mecánicos evolucionan siguiendo las leyes de Newton (bajo ciertas aproximaciones), y se conoce como ***dinámica*** al estudio de la evolución en el tiempo de estos sistemas.

Suele ocurrir cuando uno estudia las leyes de Newton que se produzca una involuntaria desconexión entre el estudio de las fuerzas aplicadas y las aceleraciones y el problema cinemático, que consiste en hallar la ley de movimiento, es decir, hallar la función que describe la posición del cuerpo en cada instante. En esta parte del curso trataremos de evitar esta desconexión, y cuando estudiemos la dinámica de un cuerpo estaremos interesados en analizar las fuerzas que actúan sobre él con el fin de hallar su ley de movimiento. Para clarificar este concepto analicemos un sistema dinámico simple:

Ejemplo: Suponga que un cuerpo de masa $m = 1\, kg$ se mueve unidimensionalmente (en línea recta, por el eje x). Producto de su interacción con el medio, actúa sobre él una fuerza resultante $F = 1N$, la cual se mantiene constante en el tiempo (idealización).

A partir de este dato queremos hallar su ley de movimiento, es decir, queremos hallar la función $x(t)$ que determina la posición del cuerpo para todo tiempo (evolución dinámica).

Primeramente planteamos la ley dinámica (2^{da} ley de Newton) que rige su evolución:

$$F = m\, a \qquad \textbf{(1)}$$

donde a es la aceleración del cuerpo que, como sabemos, representa la derivada segunda de la función posición, es decir,

$$a = \ddot{x}(t) \qquad \textbf{(2)}.$$

Si reemplazamos la ecuación **2** en **1**, obtenemos,

$$F = m\,\ddot{x}(t)$$

o escrito de una forma más cómoda,

$$\ddot{x}(t) = \frac{F}{m} = 1\frac{N}{kg} = 1\,m/seg^2 = a \qquad \leftarrow \qquad \text{aceleración} \qquad \textbf{(3)}$$

de esta forma hemos transformado el problema físico en un problema matemático consistente en resolver una

ecuación diferencial,

$\ddot{x} = 1$ o más general $\ddot{x} = a$ (donde en este ejemplo a es una constante) **(4).**

Queremos hallar la solución de esta ecuación diferencial **4**. Debemos integrarla, de tal forma de hallar la función, más general, que derivada dos veces respecto del tiempo nos de una constante a, o en nuestro caso particular que de 1.

No existe ningún método general que nos permita hallar la solución de una ecuación diferencial, y además, no todas las ecuaciones diferenciales poseen una solución analítica, por lo cual en esos casos, sólo resulta posible resolverlas numéricamente (aproximadamente).

La ecuación diferencial **4**, es una ecuación muy simple, que ya hemos integrado en cursos anteriores cuando estudiamos el movimiento uniformemente acelerado, y sabemos que tiene la pinta de una función cuadrática (ya que derivada dos veces nos da una constante):

$$x(t) = \alpha\, t^2 + \beta\, t + \gamma, \qquad \textbf{(5)}$$

donde α, β y γ son constantes que debemos determinar (y que nosotros desde el jardín de infantes sabemos cuanto valen, ¿o no?).

En lugar de integrar la ecuación diferencial **4**, sólo conformémonos en comprobar que la función dada en **5** es realmente solución de la ecuación diferencial**,** para ello la derivamos dos veces:

$$\dot{x}(t) = 2\,\alpha\, t + \beta \qquad = v(t) \quad \leftarrow \quad \text{velocidad} \qquad \textbf{(6)}$$

$$\ddot{x}(t) = 2\,\alpha \qquad = a(t) \quad \leftarrow \quad \text{aceleración} \qquad \textbf{(7)}$$

comprobamos que la derivada segunda da una constante $2\,\alpha$ y, de esta forma, si elegimos $\alpha = \frac{1}{2}\,a$ (donde en nuestro caso $a = 1$) conseguimos que,

$$\ddot{x}(t) = 2\alpha = 2\left(\frac{1}{2}a\right) = a = 1,$$

es decir, la función **5** satisface la ecuación diferencial **4**.

Pero aún no hemos terminado, ya que faltan determinar los valores de las constantes β y γ, ***la ecuación diferencial no alcanza para determinarlos***, ¿Que falta?.

Volvamos a la física para ver si nos ilumina un poco en la resolución matemática. Recordemos que sólo conocemos que el cuerpo está acelerado constantemente, esto no alcanza para saber donde se halla en cada instante, nos falta conocer donde estaba en el instante inicial y que velocidad tenía, ya que no es lo mismo ser acelerado desde el reposo a acelerarse a partir de una velocidad inicial de $100\ km/h$, y no es lo mismo partir de Buenos Aires que de San Miguel . En otras palabras, nos falta conocer las ***condiciones iniciales del sistema***.

Supongamos que el cuerpo estaba en el instante inicial $t_0 = 0$ en la posición,

$$x(0) = x_0 \qquad \textbf{(8)}$$

y que su velocidad era,

$$\dot{x}(0) = v(0) = v_0 \qquad \textbf{(9)}$$

Con estas ***condiciones iniciales*** tratemos de hallar el valor de las constantes β y γ usando las ecuaciones **5** y **6**.

De la ecuación **6,**

$$\dot{x}(0) = 2\ \alpha\ 0 + \beta = \beta$$

Comparando con **9**, vemos que la constante β es la velocidad inicial $\beta = v_0$.

De la ecuación **5**,

$$x(0) = \alpha\ 0^2 + \beta\ 0 + \gamma = \gamma$$

Comparando con **8**, vemos que la constante γ es la posición inicial de la partícula, es decir, $\gamma = x_0$.

Reemplazando los valores de las constantes en la ecuación **5** obtenemos,

la ley de movimiento,

$$x(t) = \frac{1}{2}\ a\ t^2 + v_0\ t + x_0 \qquad \textbf{(10)}$$

que es nuestra vieja amiga ley de movimiento de una partícula moviéndose unidimensionalmente con aceleración constante (ejemplo: caída libre).

Resumiendo, la ley de movimiento **10** queda determinada conociendo la ley dinámica **4** y las condiciones iniciales del sistema **8** y **9.** A partir de ella, es posible predecir la posición de la partícula en todo tiempo, pasado, presente y futuro, mientras se mantengan las condiciones dinámicas, es decir, que la partícula sea impulsada por una fuerza constantemente.

Ejercicio: Resuelva nuevamente la ecuación diferencial **4**, pero ahora usando el programa de Mathematica,

DSolve[{x''[t]==a,x[0]==x0,x'[0]==v0},x[t],t]

Ejercicio: Use los valores $x_0 = 1m$ y $v_0 = 2m/seg$ y,

a) Halle la posición del cuerpo en el instante $t = 1seg$.

b) Grafique $x(t)$. *Use el programa Mathematica (Para calcular debe presionar la tecla insert o simultáneamente las teclas Shift y Enter):*

```
x0=1;
v0=2;
x[t_]=0.5*a*t^2+v0*t+x0;
Plot[x[t],{t,0,10}]
```

c) Halle $v(t)$ y grafique. *Siguiendo con el programa Mathematica anterior:*

```
v[t_]=D[x[t],t]
Plot[v[t],{t,0,10}]
```

d) Discuta sobre si se conserva la energía o el impulso lineal de la partícula.

Un problema del cual no nos hemos ocupado es si la solución **10** que hemos hallado es única o podrían existir otras. Desde el punto de vista matemático ya estudiarán que la solución es única. Desde el punto de vista físico, podemos decir que si la solución no fuera única perdería el sentido la teoría, ya que, de esta forma la partícula podría tener más de un movimiento posible, ante las mismas condiciones, lo cual viola nuestro amado principio de causa-efecto (causalidad).

2. Guía Teórica. Oscilaciones: A partir de aquí nos vamos a abocar a un problema dinámico muy especial, el de sistemas cuya evolución presenta ciclos u oscilaciones.

Como ya dijimos, este tipo de evolución dinámica es común a muchos fenómenos naturales, no sólo físicos, y su descripción matemática resulta semejante en todos ellos.

Nosotros estudiaremos este tipo de evolución dinámica asociada al movimiento oscilatorio de sistemas simples como resortes y péndulos, sin perder de vista que éstos sólo constituyen un muy buen ejemplo (prototipo) que nos ayuda a entender fenómenos mucho más complejos.

Antes de comenzar el estudio dinámico correspondiente al movimiento oscilatorio de un resorte, resulta conveniente repasar algunos conceptos sobre funciones periódicas y luego centrarnos en funciones periódicas armónicas (funciones *seno* y *coseno*).

Funciones periódicas: Una función del tiempo $f(t)$, es periódica si repite su forma cíclicamente con un período T, ver figura 1.

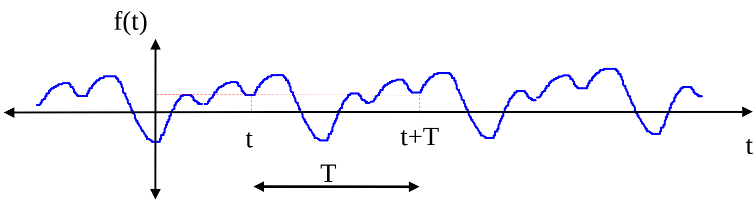


Figura 1: Ejemplo de función periódica no armónica, de período T

En este ejemplo, se observa claramente que cada T segundos se completa un ciclo (complicado en este caso, no armónico). Esta propiedad se expresa analíticamente afirmando que la función satisface la propiedad,

$$\boxed{f(t) = f(t+T)} \qquad \textit{válido para cualquier } t \textit{ del dominio.} \qquad \textbf{(1)}$$

o sea, que la función evaluada en el instante t tiene la misma imagen que la función evaluada un tiempo T posterior, independientemente de cual fuera el instante t elegido.

No resulta inmediato hallar una expresión analítica para la función periódica definida en el gráfico, pero más tarde veremos que, estas funciones periódicas complejas pueden describirse como la superposición de ***funciones armónicas*** tales como las funciones *seno* y *coseno*, por ello primeramente, estudiaremos detenidamente este tipo de funciones periódicas.

Funciones periódicas armónicas: Las funciones armónicas básicas son el *seno* y el *coseno*, cuyas gráficas conocemos perfectamente. Pero también resultan funciones armónicas cualquier combinación, translación o dilatación de estas funciones, lo cual nos brinda cierta versatilidad para obtener funciones con distinta amplitud, fase y frecuencia.

Tratemos de apelar a nuestra intuición para construir la función armónica más general, de tal forma que nos ayude a describir movimientos oscilatorios. Comencemos por la función $f(t)=\cos(t)$, donde t es la variable independiente, su gráfica se muestra en la figura 2.

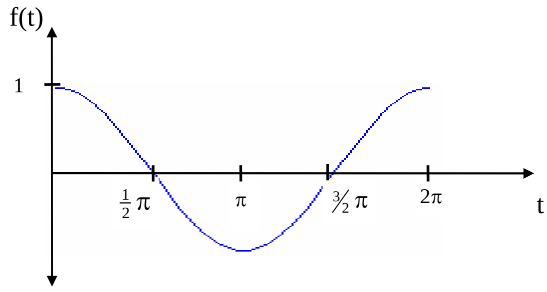


Figura 2: Ejemplo de función armónica. Función coseno, de período 2π

Esta función se repite periódicamente con período $T=2\pi$, este hecho lo podemos comprobar analíticamente usando la propiedad enunciada de las funciones periódicas, o sea,

$$\cos(t)=\cos(t+T) \qquad \forall t$$

que se satisface sí $T=2\pi$ o múltiplo de 2π.

Pareciera que esta función sólo nos sirve para describir movimientos periódicos de período $T=2\pi$, pero ya veremos como es posible cambiar su período por medio de una dilatación.

Otra propiedad importante de esta función es que su amplitud es $A=1$. Pero fácilmente podemos modificar la función para que pueda representar oscilaciones con cualquier amplitud, eso se logra simplemente multiplicando a la función *coseno* por un número que representa la nueva amplitud, por ejemplo, $f(t)=3\cos(t)$, con lo cual su gráfica se modifica sólo en que su amplitud es ahora $A=3$, como se muestra en la figura 3.

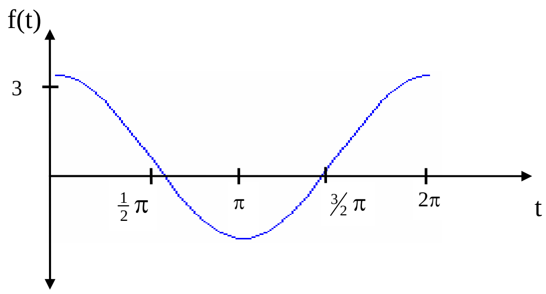


Figura 3: Gráfico de la función $f(t)=3\cos(t)$

Para modificar el período resulta necesario introducir un cambio en el argumento de la función coseno (de tal forma de dilatar o contraer la función). Por ejemplo, si multiplicamos a t por π, redefiniendo la función como,

$$f(t)=3\cos(\pi\, t)$$

esta función ya no tiene período 2π sino $T=2$.

Esto último es fácil de comprobar graficando la función, con la ayuda de una tabla de valores (complete con más valores), ver figura 4,

t	πt	$f(t) = 3\cos(\pi t)$
0	0	3
0.5seg	$\pi/2$	0
1 seg	π	-3
1,5 seg	$3/2\,\pi$	0
2 seg	2π	3

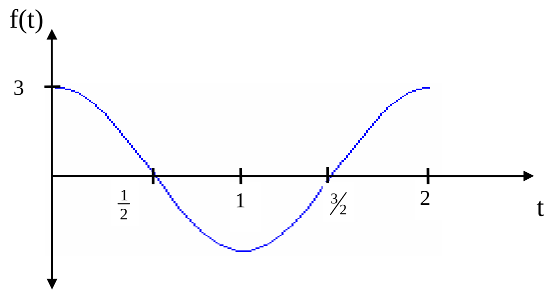


Figura 4: Gráfico de la función $f(t) = 3\cos(\pi t)$

Analicemos un poco más el por qué del cambio de período. El argumento, de la función coseno, cambió de t a πt con lo cual ahora para que el argumento tome valores de 0 a 2π sólo hace falta que el tiempo varíe entre 0 y 2 (pensarlo detenidamente, observar la tabla).

Al factor π que, modifica el argumento de la función, se le da el nombre de frecuencia angular ω, en este ejemplo $\omega = \pi$.

La relación entre el período T y la frecuencia angular ω la podemos hallar a partir de la definición de función periódica,

$$f(t) = f(t+T) \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t) = \cos(\omega\,(t+T)) = \cos(\omega t + \omega T) \quad \Leftrightarrow \quad \omega T = 2\pi \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad \text{o} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \qquad \textbf{(2)}$$

y en el ejemplo,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

La frecuencia angular ω, posee una analogía con la velocidad angular en un movimiento circular. Si una partícula gira sobre un círculo de radio A con velocidad angular ω, sabemos que la coordenada x de la posición tiene una ecuación de movimiento del tipo armónico (ver figura 5), es decir,

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

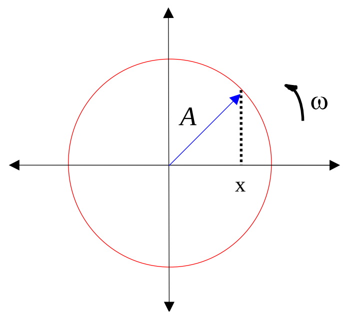


Figura 5: La evolución de la componente *x* (o *y*), correspondiente a un movimiento circular, resulta armónica.

Esta analogía nos sirve para entender mejor la relación $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Pensemos en la partícula que gira con velocidad angular $\omega = \pi \ rad/seg$, es decir que recorre π radianes en 1 segundo. Lo que nos interesa es saber que tiempo demora en dar una vuelta (período T), o sea, cuanto tarda en recorrer 2π radianes, para ello basta con hacer una regla de tres simple,

$\pi \ rad \longrightarrow 1 seg$

$2\pi \ rad \longrightarrow T \qquad \Rightarrow \qquad T = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2 \quad o, en\ general, \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Ya hemos construido una función armónica cuya frecuencia y amplitud podemos elegir según nuestra conveniencia.

Pero aún nos falta arreglar un detalle, la función *coseno* siempre toma su máximo valor en el instante $t = 0$, lo cual restringe su utilidad, ya que no podemos con ella describir un movimiento oscilatorio en donde la amplitud máxima no concuerde con el instante inicial. Algo parecido ocurre con la función *seno* que se anula en el instante inicial. Pero, sabemos solucionarlo apelando a corrimiento de funciones.

Si al argumento de la función le sumamos una constante δ (*delta*), logramos que la función se desplace hacia la izquierda, en esa cantidad δ (¡ojo!, primero se desplaza y luego se contrae o dilata).

De esta forma, la función armónica más general resulta ser,

$$f(t) = A\cos(\omega t + \delta) \qquad \textbf{(3)}$$

donde δ es la fase inicial, y determina el valor de la función en el instante inicial, o sea,

$$f(0) = A\cos(\delta)$$

Ejemplo: Grafique la función armónica $f(t) = 3\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$ y determine su período, amplitud y fase inicial (Hágalo también con el Mathematica).

Claramente $A = 3,\ \omega = \pi$ y $\delta = \frac{\pi}{2}$ y por ende $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2$.

Para graficar podemos optar por dos caminos, el primero es el tradicional, hacer una tabla de valores. El segundo es un poco más conceptual y consiste en usar las propiedades conocidas de traslación y dilatación.

Primeramente, como hemos dicho debemos trasladar a la función *coseno* una cantidad $\delta = \frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda (si fuera negativo, hacia la derecha), y luego contraer la función (cambiar el período), tal como se muestra en la figura 6.

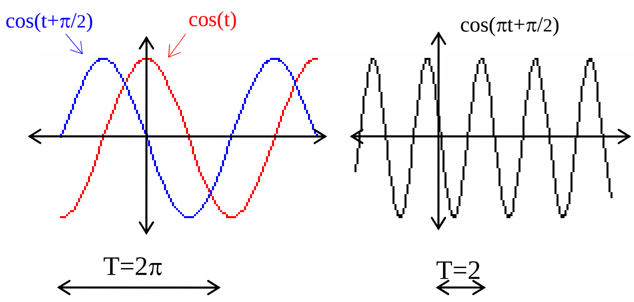


Figura 6: Gráfica de las funciones $\cos(t)$, $\cos(t+\pi/2)$ y $\cos(\pi t+\pi/2)$

Hemos graficado las funciones: cos(t) y cos(t+π/2) juntas, apreciándose el corrimiento hacia la izquierda. Aparte hemos graficado la función cos(πt+π/2), en donde vemos claramente que la función, luego de corrida, se contrae contra el eje de las ordenadas variando su período de $T=2\pi$ a $T=2$.

La fase inicial determina, junto con la amplitud, el valor que toma la función en el instante inicial, en este caso 0, ya que $\mathrm{f}(t=0)=3\cos(\pi.0+\frac{\pi}{2})=0$.

Por ultimo, podemos definir la frecuencia tradicional (ciclos por segundo) como, $f=\dfrac{1}{T}$, y en el caso en que la variable t represente al tiempo, la frecuencia tiene unidades de $\dfrac{1}{seg.}=Hertz=Hz$. Se relaciona con la frecuencia angular a través del período, o sea,

$$\boxed{f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}} \qquad \textbf{(4)}$$

Funciones Armónicas Complejas: Una forma muy común y práctica de expresar a una función armónica es a partir de una exponencial compleja. Aunque al principio puede parecer una complicación, reduce enormemente los cálculos, porque resulta simple multiplicar y sumar funciones exponenciales y principalmente porque se derivan e integran muy fácilmente.

Chiste: Resulta que se organiza una gran fiesta entre las funciones matemáticas. La fiesta es un descontrol, se observa a la función seno provocando insinuante a la coseno, la tangente a la cotangente, la lineal a la cuadrática, y así todas, menos la pobre función exponencial que se halla quietita, sola y triste en un rincón. La función lineal (madre de todas ellas) se acerca a la exponencial y le dice:
Función lineal: Che **intégrate.**
Respuesta de la exponencial: ¡**Para qué, si da lo mismo**!.

En general uno comienza trabajando con exponenciales complejas, hace los cálculos necesarios (deriva, integra, multiplica, etc.), y por último, como solución, se queda sólo con la parte real del número complejo (solución física). Los que estudiamos en el colegio industrial, recordamos como aparecían las funciones exponenciales complejas en la descripción de la corriente alterna. Algo notable ocurre en física cuántica, donde las funciones de onda, que describen los estados físicos, son números complejos y no resulta correcto quedarse sólo con la parte real.

Repaso: La función exponencial compleja $e^{i\theta}$ se expresa como combinación lineal de las funciones seno y coseno de la siguiente forma,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \mathrm{sen}(\theta) \qquad \textbf{(5)}$$

Su representación en el plano complejo se muestra en la figura 7.

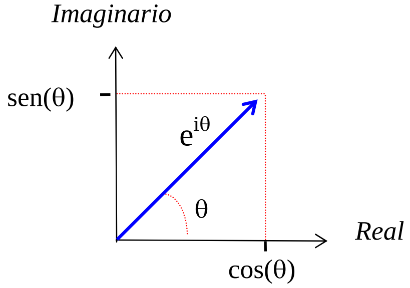


Figura.7: Representación gráfica de la exponencial compleja $e^{i\theta}$

Su complejo conjugado es (grafíquelo),

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\ \mathrm{sen}(\theta) \qquad \textbf{(6)}$$

Podemos escribir al coseno como la parte Real de la exponencial compleja y al seno como su parte imaginaria, o sea,

$$\cos(\theta) = Real\left(e^{i\theta}\right) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{sen}(\theta) = Im\left(e^{i\theta}\right) \qquad \textbf{(7)}$$

Otra forma de escribir a las funciones seno y coseno a partir de las exponenciales complejas es (verifique a partir de **5** y **6**),

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \textbf{(8)}$$

Escribamos primero la función armónica compleja, de frecuencia $\omega = \frac{2\pi}{T}$, más simple (ver ec. **1**),

$$f(t) = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\ \mathrm{sen}(\omega t) \qquad \textbf{(9)}$$

Para fijar conceptos, veamos como evoluciona la función $f(t)$ en el tiempo, para ello elaboramos una tabla de valores,

t	$\omega t = \frac{2\pi}{T} t$	$f(t) = e^{i\omega t}$
0	0	$e^{i0} = 1$
$T/4$	$\pi/2$	$e^{i\pi/2} = i$
$T/2$	π	$e^{i\pi} = -1$
$3T/4$	$3/2\,\pi$	$e^{i3\pi/2} = -i$
T	2π	$e^{i2\pi} = 1$

En la figura 8, se muestra la evolución de la función exponencial en el tiempo, note como el número complejo rota, con velocidad angular ω y período T, en dirección ***antihoraria***.

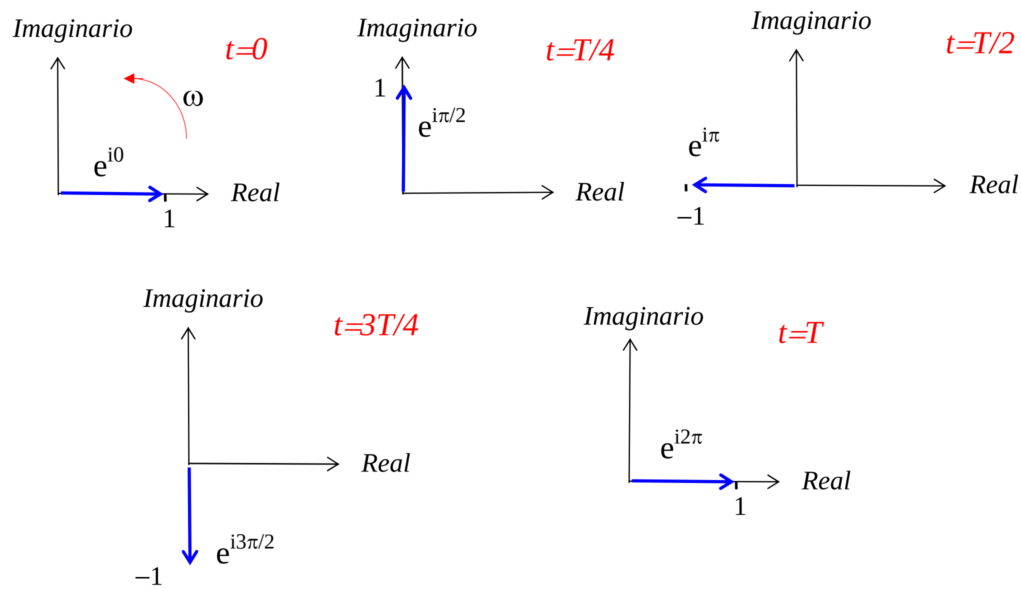


Figura.8: Representación gráfica de la evolución en el tiempo de la función $e^{\mathrm{i}\omega t}$.

Queda como ejercicio para el lector hacer el gráfico de la función conjugada, es decir,

$$f^*(t) = e^{-\mathrm{i}\,\omega t} = \cos(\omega t) - \mathrm{i}\ \operatorname{sen}(\omega t) \qquad \textbf{(10)}$$

compruebe que rota en dirección ***horaria*** con período T.

Las funciones armónicas complejas **9** y **10** tienen amplitud $A = 1$ y en el instante inicial se hallan sobre el eje real. Podemos generalizar la función armónica compleja, a partir de otorgarle una amplitud cualquiera y una fase inicial, o sea,

$$g(t) = A\, e^{\mathrm{i}\,(\omega t + \delta)} = A\left[\cos(\omega t + \delta) + \mathrm{i}\ \operatorname{sen}(\omega t + \delta)\right] \qquad \textbf{(11)}$$

Ejercicio: Grafique, en el plano complejo, la evolución en el tiempo de la función,

$$g(t) = 2\, e^{\mathrm{i}\,(\pi t + \pi/4)} = 2\left[\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\ \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

3. Grafique las siguientes funciones periódicas, y halle su amplitud, período y fase inicial. Discuta sobre el significado de la fase inicial:

a) $\Psi(t) = \frac{1}{2}\cos(2t + \pi)$ *Resp.* $A = \frac{1}{2}$, $T = \pi$ y $\delta = \pi$

b) $\Psi(t) = 2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2})$ *Resp.* $A = 2$, $T = 4\pi$ y $\delta = -\frac{\pi}{2}$

c) $\Psi(t) = 2\, e^{-\mathrm{i}\,(\pi t + \pi/4)} = 2\left[\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ *Resp.* $A = 2$, $T = 2$ *y* $\delta = \frac{\pi}{4}$

Precaución: Si aplica corrimiento de funciones tenga mucho cuidado con el orden en que realiza las operaciones de corrimiento y dilatación.

4. Compruebe que la función armónica $\Psi(t) = \frac{1}{2}\cos(2t + \pi/4)$ puede escribirse como una combinación de senos y cosenos, o sea, $\Psi(t) = A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)$. Halle los valores de A, B y ω.

5. Dadas las siguientes funciones periódicas,

i), $\Psi_1(t) = 3\ \mathrm{sen}(2\ t)$,

ii), $\Psi_2(t) = 3\ \cos(2\ t + \dfrac{\pi}{3})$.

Reescriba cada una de ellas, de las dos maneras siguientes:

a) $\Psi(t) = A\, e^{\mathrm{i}\,\omega t} + B\, e^{-\mathrm{i}\,\omega t}$, halle A, B y ω.

b) $\Psi(t) = \mathrm{Re}\left(A\, e^{\mathrm{i}\,(\omega t + \delta)}\right)$, halle A, δ y ω.

6. La posición de una partícula, de masa $m = 1\,g$, se halla determinada por la función armónica $x(t) = 5cm\ \cos(4\pi\ t)$, en donde t viene dado en segundos,

a) ¿Cuál es la frecuencia?. *Resp.* $f = 2\ {}^{\mathrm{cic}}\!/_{\mathrm{seg}}$.

b) ¿Cuál el período?. *Resp.* $T = 0{,}5\ seg$.

c) ¿Cuál es la amplitud del movimiento de la partícula?. *Resp.* $A = 5\ cm$.

d) Graficar la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.
Use el programa Mathematica (Para calcular debe presionar la tecla insert o simultáneamente las teclas Shift y Enter):
```
x[t_ ]=5*Cos[4*Pi*t];
v[t_ ]=D[x[t],t]
a[t_ ]=D[v[t],t]
Plot[x[t],{t,0,1}]
Plot[v[t],{t,0,1}]
Plot[a[t],{t,0,1}]
```

e) ¿Cuál es el primer instante después de *t=0* en que la partícula está en su posición de equilibrio? ¿En qué sentido se está moviendo en ese instante?. *Resp.* $t = {}^{1}\!/_{8}\ seg$.

f) ¿Cuál es la velocidad máxima del cuerpo? ¿En qué instantes posee esa velocidad?.
Resp. $v = 20\pi\ {}^{\mathrm{cm}}\!/_{\mathrm{seg}}$.

g) ¿Cuál es la aceleración máxima del cuerpo? ¿En qué instantes tiene esa aceleración?.
Resp. $a = 80\pi^2\ {}^{\mathrm{cm}}\!/_{\mathrm{seg}^2}$.

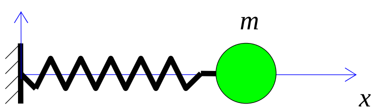
h) Halle la energía cinética correspondiente a la masa oscilante.

7. Recomendado. Ejercicio Teórico. Oscilador armónico (evolución dinámica):

En este ejercicio, proponemos estudiar la dinámica de un sistema físico simple e ideal (***modelo***) cuya evolución en el tiempo corresponde a un movimiento oscilatorio armónico. El estudio de sistemas ideales, como éste, nos ayuda a comprender fenómenos físicos reales más complejos.

Se pretende resolver el problema dinámico correspondiente a una partícula de masa $m = 1\,kg$ que desliza, sobre una superficie horizontal sin fricción, ligado a una pared por medio de un resorte ideal, es decir, perfectamente elástico y sin masa, de constante elástica $k = 400\ N/m$, y longitud relajada $l_0 = 30\,cm$, ver figura 9.

Fig.9



Como primer paso hacia el estudio de fenómenos oscilatorios, vamos a suponer que el sistema no disipa energía, por ello hemos considerado que no existe rozamiento de ningún tipo.

Si apartamos a la masa de su posición de equilibrio y la soltamos, a partir de nuestra experiencia cotidiana, podemos afirmar que la evolución dinámica subsiguiente del sistema resulta ser un movimiento oscilatorio. Pero nuestra intuición no nos alcanza para asegurar que ése movimiento es realmente periódico (es decir, que cada ciclo es igual a los otros y dura el mismo tiempo), y menos aún si corresponde a un movimiento oscilatorio armónico (descriptible a partir de funciones seno o coseno). Para dilucidar esta cuestión sólo podemos apelar a la teoría o al experimento, aquí sólo nos ocuparemos de la teoría.

a) *Importante*. Como primer paso, a partir de las leyes de Newton $(F = m\,a)$, queremos determinar la evolución dinámica de la masa, una vez que ***oscila sólo bajo la influencia del resorte*** (por ejemplo***, ya la hemos desplazado y soltado, describimos su evolución a partir de ese instante, por lo cual, ya no influyen las fuerzas que lo desplazaron inicialmente, sólo el resorte interactúa con la masa***).

Obtenga la ***ecuación diferencial que describe la evolución de la masa*** (sólo el resorte interactúa con ella). Por simplicidad suponga que el movimiento se restringe al eje *x*, por lo cual, sólo hace falta una coordenada para describirlo (***movimiento unidimensional***).

Comentario: Recuerde que la fuerza elástica resulta proporcional al alargamiento del resorte (con signo cambiado), respecto de su longitud relajada, es decir,

$$F_{\text{elástica}} = -k\,\Delta x = -k\,(x - l_0).$$

La interacción elástica es proporcional al alargamiento, por lo cual, en el caso unidimensional, depende linealmente de la coordenada** x **(Interacción lineal).

La constante elástica k da cuenta de la dureza del resorte (mayor fuerza, a un mismo alargamiento). La constante l_0 representa la longitud relajada del resorte (sin estirar).

Resp. $$m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k\,[x(t) - l_0] \quad \text{o} \quad \ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}\,[x(t) - l_0] \qquad \textbf{(1)},$$

b) A partir de la ecuación diferencial anterior, halle la posición de equilibrio de la masa, es decir, la posición en donde las fuerzas que actúan sobre ella se anulan. ¿El equilibrio es estable o inestable?.

Resp. La posición de equilibrio estable es $x_{equi} = l_0$.

c) ***La ecuación diferencial* 1 *rige la evolución dinámica del sistema***. A partir de ella, y de las condiciones iniciales, es posible hallar la función $x(t)$ que describe la posición de la masa en todo tiempo. Para ello debemos integrarla, al igual que hicimos en el ejemplo de la guía teórica 1. La dificultad que encontramos en éste caso, es que la aceleración no es una constante, depende fuertemente de la posición de la partícula.

La ecuación diferencial puede escribirse en forma más sencilla si definimos una nueva variable,

$$\boxed{\Psi(t) = x(t) - x_{equi}} \qquad (\Psi \equiv Psi,\ letra\ Griega) \qquad \textbf{(2)}$$

que corresponde simplemente a un cambio de coordenadas. La nueva variable Ψ mide cuanto se desplaza la masa a partir de la posición de equilibrio x_{equi} (no desde la pared como era antes). Discuta (ver figura 10).

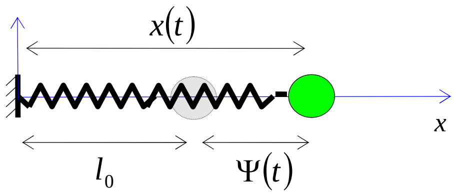


Figura 10: La coordenada Ψ describe el desplazamiento, de la masa, a partir de la posición de equilibrio

Haga este cambio de variables y demuestre que la ecuación **1** se transforma a,

$$\boxed{m\frac{d^2\Psi(t)}{dt^2} = -k\Psi(t)\,, \qquad \text{o} \qquad \ddot{\Psi} = -\frac{k}{m}\Psi \qquad \textbf{(3)}}$$

La ecuación 3 nos dice que la aceleración, de la masa, resulta proporcional al apartamiento Ψ (interacción lineal) y de signo opuesto.

Desde el punto de vista matemático veremos que este cambio de coordenadas simplifica las cuentas, desde el punto de vista físico, más tarde entenderemos que, ayuda a mejorar nuestra comprensión en situaciones más complejas.

d) La ecuación **3** es una ***ecuación diferencial de segundo orden lineal y homogénea***.

- De ***segundo orden***, porque el orden de derivación más alto es una derivada segunda.
- ***Lineal***, por qué la variable Ψ no se halla elevada a ninguna potencia superior a 1 **(*interacción lineal*).**

Un ejemplo de ecuación no lineal es $\ddot{\Psi} = -\frac{k}{m}\Psi + \Psi^2$, lo cual, como luego veremos, complica el cálculo enormemente.

- ***Homogénea***, porque no posee ningún término constante sumando (término con Ψ^0). Una ecuación homogénea, como la **3,** siempre posee la solución trivial $\Psi(t) = 0 \quad \forall t$ (verifique). Esto puede visualizarse mejor si pasamos del lado izquierdo todos los términos en donde figura Ψ y del lado derecho los términos constantes, es decir,

$$\ddot{\Psi} + \frac{k}{m}\Psi = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Un ejemplo de ecuación ***no homogénea o inhomógenea*** lo representa la ecuación **1**, reagrupando un poco los términos,

$$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = k\,l_0 \qquad \textbf{(5)}$$

En donde del lado derecho tenemos un término constante, y debido a esto, la función trivial no es solución de la ecuación (verifique).

Con el cambio de variables hemos logrado pasar de una ecuación inhomógenea a una homogénea.

No existe ningún método general que nos permita hallar la solución de una ecuación diferencial arbitraria, y además, no todas las ecuaciones diferenciales poseen una solución analítica, por lo cual en esos casos, sólo resulta posible resolverlas numéricamente (como lo haremos en el ejercicio 11).

La ecuación diferencial **3**, es una ecuación muy conocida. Nosotros no propondremos ningún método general para resolverla sino simplemente ***afirmamos que su solución es una función armónica***.

Verifique que las siguientes ***funciones armónicas*** son todas posibles soluciones de la ecuación diferencial **3** (reemplácelas en la ecuación diferencial **3**),

i) $\Psi(t) = A\ \cos(\omega t + \delta)$

ii) $\Psi(t) = A\ \cos(\omega t) + B\ \mathrm{sen}(\omega t)$

iii) *Optativo.* $\Psi(t) = A\, e^{\mathrm{i}\,\omega t} + B\, e^{-\mathrm{i}\,\omega t}$

iv) *Optativo.* $\Psi(t) = A\, e^{\mathrm{i}\,(\omega t+\delta)}$

A partir de reemplazar en la ecuación diferencial **3**, verifique que ***la frecuencia angular de oscilación*** ω ***queda determinada por las propiedades del sistema, a través de su constante elástica k y de la masa de la partícula m , en la forma,***

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}} \qquad \text{o} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \textbf{(6)}$$

A partir de lo hallado, podemos afirmar que, si la masa sólo interactúa con el resorte, ***la frecuencia de oscilación*** ω ***no es arbitraria, sino que el sistema oscila con una frecuencia característica, determinada por la relación 6.***

Comentario: Cualquiera de las funciones armónicas anteriores es solución de la ecuación diferencial **3**, y resulta fácil demostrar que son exactamente la misma función escrita de formas distintas. Todas ellas sirven para describir la evolución de la masa, pero la función armónica,

$$\boxed{\Psi(t) = A\ \cos(\omega t + \delta)} \qquad \textbf{(7)}$$

es la que más usaremos (o *seno* en lugar de *coseno*), debido a que resulta más fácil, a partir de ella, extraer conceptos físicos.

De la ley de movimiento **7,** concluimos que la masa oscila armónicamente, a partir de su posición de equilibrio, con frecuencia angular ω. ***La constante** A **indica la amplitud de la oscilación, su valor no se halla condicionado por la ecuación dinámica 3 (pensarlo detenidamente), sino que depende exclusivamente (dentro de la aproximación elástica) de las condiciones iniciales del sistema, que aún no hemos impuesto.*** Lo mismo sucede con la fase δ, que según ya hemos discutido, traslada a la función coseno, de tal forma que, permite describir la evolución de partículas que en el instante inicial están en una posición cualquiera, no necesariamente en su máximo estiramiento o el origen.

e) Halle el valor numérico de la frecuencia angular ω, la frecuencia f y el período *T*. ***¿Estas cantidades, dependen de las condiciones iniciales de la masa? ¿Dependen de la amplitud de oscilación?.***

Resp. $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 20\ rad\,/\,seg$, $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 3{,}18\ cic\,/\,seg$ y $T = 0.314$ seg.

f) Explique cuál es el significado físico de ω, f y T (vea la guía teórica 1).

Comentario: recuerde lo comentado en la guía teórica 1 donde discutimos sobre la relación entre la frecuencia angular ω*, de un movimiento armónico, y la velocidad angular de una partícula con movimiento circular uniforme. En el caso del resorte esta equivalencia resulta mucho más gráfica. La proyección sobre el eje x (sombra sobre el eje x) del movimiento circular, concuerda exactamente con la posición real de la partícula que se halla oscilando armónicamente unida al resorte (Pensarlo detenidamente).*

g) *Importante*. Usando como solución, de la ecuación diferencial **3,** a la función armónica $\Psi(t) = A\ \cos(\omega t + \delta)$, halle la "***ley de movimiento***" de la masa, es decir, determine completamente a la función $\Psi(t)$, determinando los valores de A y δ, para ello suponga que a $t = 0$ la masa está en la posición de equilibrio con una velocidad de $v = +0{,}1\ m/seg$ (el signo más indica que se mueve en el sentido de expansión del resorte).

Resp, $\boxed{\Psi(t) = 0{,}005\cos(20\,t - \frac{\pi}{2})\ \ metros = 0{,}005\,\mathrm{sen}(20\,t)\ \ metros}$

Reobtenga la solución anterior usando el Mathematica,

Dsolve[{psi''[t]+400 psi[t]==0,psi[0]==0,psi'[0]==0.1},psi[t],t]*

h) Grafique la función $\Psi(t)$ hallada en el ítem anterior y discuta lo hallado.

Ayuda: puede usar el programa de Mathematica,

```
psi[t_ ]=0.005*Sin[20*t];
Plot[psi[t],{t,0,1},
PlotRange->{-0.0055,0.0055},
PlotStyle->{RGBColor[0,0,1]}];
```

i) Halle la función $x(t)$, recuerde el cambio de variables (ec. **2**).

Resp. $x(t) = 0{,}3m + 0{,}005m\ \ \mathrm{sen}(20t)$

j) Halle la velocidad y la aceleración de la masa en el instante *t*=1 *seg*.

Resp. $v(1) \approx 0{,}04\,{}^{m}\!/_{seg}$ *y* $a(1) \approx -1{,}82\,{}^{m}\!/_{seg^2}$

Verifique con el programa Mathematica,

```
psi[t_]=0.005*Sin[20*t];
v[t_ ]=D[psi[t],t]
a[t_ ]=D[v[t],t]
v[1.]
a[1.]
```

k) ¿Cuál es la velocidad máxima del cuerpo?.

l) ¿Cuál es la aceleración máxima del cuerpo?.

m) *Importante*. ¿Depende la frecuencia de las condiciones iniciales o de la amplitud?

> *Comentario:* ***Todo sistema dinámico cuya ecuación diferencial pueda reducirse a la ecuación:***
>
> $$\ddot{\Psi} = -\,\omega^2\ \Psi \qquad \textbf{\textit{(oscilación armónica)}} \qquad \textbf{(11)}$$
>
> ***donde*** ω^2 ***represente a cualquier número real positivo, tiene como solución una función que representa una oscilación armónica con frecuencia angular*** ω**.**

8. Recomendado. Ejercicio Teórico. Análisis energético del oscilador armónico (continuación del ejercicio 7): A partir de los datos y resultados del ejercicio 7, y sabiendo que la evolución dinámica del sistema se describe con la función,

$$\Psi(t) = A\ \cos(\omega t + \delta)$$

a) Halle la energía cinética de la masa oscilante (en función del tiempo).

b) Halle la energía potencial de la masa oscilante (tome como cero de potencial a la posición de equilibrio).

Ayuda: Tomando el cero de potencial en la posición en donde el resorte se halla relajado (es decir en la posición de equilibrio $\Psi = 0$*), la energía potencial elástica resulta,*

$$E_p = \tfrac{1}{2} k\,(x - l_0)^2 = \tfrac{1}{2} k\,\Psi^2 \qquad \textbf{(8)}$$

(En el ejercicio **12** *discutiremos el caso general en que el cero de potencial se toma en otro punto).*

c) Demuestre que la energía mecánica total, de la masa oscilante, es,

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}\, k\, A^2} \qquad \textbf{(9)}$$

(Sólo válida si se fija el cero de potencial en la posición de equilibrio del sistema)

d) ¿Se conserva la energía mecánica?. Discuta.

e) ¿La energía mecánica total depende de las condiciones iniciales?.

f) ¿Cuál es la energía cinética máxima?.

g) En un mismo gráfico grafique la energía potencial, cinética y mecánica, y discuta sobre la conversión de una en otra, ayúdese con el gráfico.

h) Vuelva a hallar la posición de equilibrio del sistema pero ahora a partir de argumentos energéticos. ¿El punto de equilibrio es estable o inestable?. *Recuerde que puede hallar la fuerza que actúa sobre la masa usando* $F = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}$ *(valido para el caso unidimensional, en tres dimensiones se cumple* $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$*).*

i) En muchos casos de interés, no resulta importante conocer exactamente la posición de una partícula en todo instante, pero si su comportamiento en promedio, por ejemplo, puede interesar cuánto vale la energía cinética o la energía potencial en valor medio.

Definimos el valor medio de una función periódica $f(t)$, sobre un período de oscilación, como la integral,

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt \qquad \text{donde} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \textbf{(10)}$$

Queda como ejercicio para el lector analizar esta definición comparándola con la forma en que usualmente se calcula el promedio, tener en cuenta que en este caso no se trata de cantidades discretas sino del promedio de una función continua (piense algunos ejemplos, tales como el promedio de la función seno o coseno).

Usando la definición anterior calcule los valores medios de las funciones $\Psi(t)$ y $\Psi^2(t)$ sobre un período de oscilación.

Ayuda: Use los siguientes resultados, trate de justificarlos gráficamente,

$$\langle \cos(\omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \delta)\, dt = 0, \qquad \langle \mathrm{sen}(\omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{sen}(\omega t + \delta)\, dt = 0$$

$$\langle \cos^2(\omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \delta)\, dt = \frac{1}{2}, \qquad \langle \mathrm{sen}^2(\omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{sen}^2(\omega t + \delta)\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos(\omega t + \delta)\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \delta)\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)\, dt = 0$$

Resp. $\langle \Psi \rangle = 0$ y $\langle \Psi^2 \rangle = \dfrac{A^2}{2}$

Verifíquelo con el Mathematica, usando

```
w=2*Pi/T;
psi[t_]=a*Cos[w*t+delta];
media=(1/T)*Integrate[psi[t],{t,0,T}];
media2=(1/T)*Integrate[psi[t]^2,{t,0,T}]
```

j) Usando el resultado anterior, demuestre que el valor medio (sobre una oscilación) de la energía cinética resulta igual al valor medio de la energía potencial, e igual a la mitad de la energía mecánica total (***Teorema del Virial***).

k) *Importante*. Escriba un comentario o resumen de los conceptos más importantes aprendidos en los ejercicios 7 y 8.

9. Repaso. Rehaga los ejercicios **7** y **8**, pero ahora con las siguientes condiciones iniciales:

a) A *t=0* el resorte está estirado $5\ cm$ y la masa tiene una velocidad $v = 1 \, {}^{m}\!/_{seg}$.

Respuesta de la ecuación dinámica: $\Psi(t) \cong 0{,}07 \ \cos(20t - 0{,}785)$ *metros*

Reobtenga la solución anterior usando el Mathematica,

Dsolve[{psi''[t]+400 psi[t]==0,psi[0]==0.05,psi'[0]==1},psi[t],t]*

b) A *t=0* el resorte está estirado $5\ cm$ y la masa tiene una velocidad nula.

Respuesta de la ecuación dinámica: $\Psi(t) = 0{,}05 \ \cos(20t)$ *metros*

Vuelva a obtener la solución anterior usando el Mathematica,

Dsolve[{psi''[t]+400 psi[t]==0,psi[0]==0.05,psi'[0]==0},psi[t],t]*

10. Guía teórica. Resolución de la ecuación inhomogénea. La ecuación inhomogénea **1** del ejercicio 7 (o la **5**, que es la misma ecuación) puede resolverse de dos maneras:

- Una, es haciendo el cambio de variables propuesto en el problema anterior, o sea, ***describir al sistema desde la posición de equilibrio***, de tal forma que la ecuación diferencial correspondiente a la nueva variable resulta homogénea.
- La otra posibilidad es usar que,

La solución general de una ecuación diferencial inhomogénea, como por ejemplo la ecuación 5 del problema anterior,

$$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = k\,l_0 \qquad \textbf{(1)}$$

se encuentra sumando una solución de la ecuación homogénea asociada a la ecuación 1, más una solución particular, es decir,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \qquad \textbf{(2)}$$

La ecuación diferencial homogénea asociada a la ecuación **1,** se construye a partir de ella, pero en lugar de estar igualada a un número ($k\,l_0$), se halla igualada a cero, es decir,

$$m\,\ddot{x}_h(t) + k\,x_h(t) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

reagrupando para que nos resulte más familiar,

$$\ddot{x}_h(t) = -\frac{k}{m}\,x_h(t) \qquad \textbf{(4)}$$

Vemos que esta ecuación homogénea tiene la forma de la ecuación del oscilador armónico, cuya solución conocemos. Entonces, la solución de la ecuación homogénea asociada (ec. **3** o **4**), resulta:

$$x_h(t) = A\ \cos(\omega t + \delta) \qquad \text{donde} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textbf{(5)}$$

Sólo resta hallar una solución particular (cualquiera) de la ecuación inhomogénea (ec. **1)**. De observarla a simple vista, comprobamos que si proponemos como solución particular a una constante,

$$x_p(t) = l_0 \qquad \textbf{(6)}$$

ésta función constante, satisface la ecuación **1** (verifique).

Por consiguiente, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden lineal e inhomogénea (ec. **1**), resulta (verifique que es solución),

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = l_0 + A\cos(\omega t + \delta) \qquad \textbf{(7)}$$

Físicamente significa que la coordenada *x* oscila armónicamente alrededor de su valor de equilibrio, que en este caso es l_0. Compare con lo que obtuvo en el ítem i) del ejercicio 7.

11. Recomendado. Resolución numérica de la ecuación diferencial. Volvamos al ejercicio teórico 7 (usamos los mismos datos), donde queríamos resolver la ecuación diferencial:

$$\ddot{\Psi} = -\frac{k}{m}\,\Psi = -400\,\tfrac{1}{seg^2}\;\Psi \qquad \textbf{(1).}$$

Ya hemos resuelto esta ecuación diferencial analíticamente en el ejercicio **7**, allí obtuvimos que la evolución dinámica se describe por,

$$\Psi(t) = 0{,}005\,\mathrm{sen}(20\,t)\ \ metros\ ,$$

cuando las condiciones iniciales eran que a $t = 0$ la masa estaba en la posición de equilibrio con una velocidad de $v = +0{,}1\ m/seg$.

Ahora queremos volver a resolver la ecuación **1** pero por un método aproximado, que consiste en integrarla numéricamente.

Conociendo la solución exacta, no resulta muy útil hacer un cálculo aproximado, pero este cálculo lo hacemos con fines didácticos, ya que, no todas las ecuaciones diferenciales pueden resolverse analíticamente (sólo algunas pocas), por lo cual, la resolución numérica es la única alternativa posible.

En este ejercicio veremos una forma muy elemental de integración numérica, en casos más complejos, como ecuaciones no lineales, los cuidados en la integración deben ser mucho mayores, ya que pequeños errores son amplificados enormemente en cada paso de integración.

Como primer paso para resolver la ecuación numéricamente, resulta necesario discretizar el tiempo, ¿qué quiere decir esto?, vamos a pensar que el tiempo transcurre de a pequeños saltos finitos δt (no continuamente).

La razón por la que debemos discretizar el tiempo, es porque resulta imposible determinar numéricamente, en forma continua, la posición de la partícula, sólo sabemos calcular desplazamientos producidos en períodos de tiempo, no en instantes.

El incremento de tiempo δt debe ser chico para que el cálculo sea lo más exacto posible, como después comprobaremos. Ahora la pregunta es ¿chico respecto de qué?. El único tiempo característico del sistema que tenemos es el período de oscilación, así que en principio debemos elegir un incremento de tiempo chico respecto a este período ($T = 0{,}314 seg$, aunque en este problema aún no lo conocemos, ya que suponemos que no tenemos la solución analítica), por ejemplo $\delta t = 0{,}03 seg$, si al finalizar encontrásemos que no fue lo suficientemente pequeño deberíamos recomenzar con otro valor.

El objetivo es calcular el desplazamiento de la masa en los tiempos:

$$t = 0,\ \delta t,\ 2\delta t,\ 3\delta t,\ 4\delta t,\ \ldots\ldots$$

es decir queremos calcular:

$$\Psi(0),\ \Psi(\delta t),\ \Psi(2\delta t),\ \Psi(3\delta t),\ \Psi(4\delta t),\ \ldots..$$

Veamos lo que sabemos, tenemos como dato la posición y la velocidad inicial de la masa,

$$\Psi(0) = 0\ metros \qquad \text{y} \qquad \dot{\Psi}(0) = 0{,}1\,\tfrac{m}{seg}$$

y también conocemos la aceleración en el instante inicial, ya que la podemos calcular usando la ecuación diferencial **1**, es decir,

$$\ddot{\Psi}(0) = -400\,\tfrac{1}{seg^2}\;\Psi(0) = -400\,\tfrac{1}{seg^2}\;0 = 0\;\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{seg}^2}\,.$$

A partir de estos datos deberíamos aproximar la posición, la velocidad y la aceleración en el instante posterior δt, es decir, hallar un valor aproximado de $\Psi(\delta t),\ \dot{\Psi}(\delta t)$ y $\ddot{\Psi}(\delta t)$. Cómo hacer esto es toda la cuestión.

En una primera aproximación (muy mala), podemos calcular el desplazamiento suponiendo que el movimiento posterior fue realizado a velocidad constante igual a $\dot{\Psi}(0) = 0{,}1\tfrac{m}{seg}$, y por consiguiente, el desplazamiento luego de un tiempo δt resulta (usando $x = x_0 + v\,\delta t$),

$$\Psi(\delta t) = \Psi(0) + \dot{\Psi}(0)\;\delta t = 0m + 0{,}1\tfrac{m}{seg}\;\;0{,}03seg = 0{,}003m$$

Con este dato ya se nos abre la puerta para calcular la aceleración en el instante δt con la ecuación **1**,

$\ddot{\Psi}(\delta t) = -400\tfrac{1}{seg^2}\,\Psi(\delta t) = -400\;\tfrac{1}{seg^2}\;0{,}003\,m = -1{,}2\tfrac{m}{seg^2}$ (¿se frena?, ¿por qué?)

y con el dato de la aceleración podemos aproximar (muy burdamente) a la velocidad en el instante δt como ($v = v_0 + at$),

$\dot{\Psi}(\delta t) = \dot{\Psi}(0) + \ddot{\Psi}(\delta t)\,\delta t = 0{,}1\tfrac{m}{seg} - 1{,}2\tfrac{m}{seg^2}\,0{,}03\,seg = 0{,}064\,\tfrac{m}{seg}$ (¡se frena!)

Ya tenemos $\Psi(\delta t),\ \dot{\Psi}(\delta t)$ y $\ddot{\Psi}(\delta t)$. ***El resto del procedimiento es repetir estos pasos hasta el tiempo de integración deseado.***

a) Verifique que el algoritmo general para integrar la ecuación diferencial se resume en,
   i) $\Psi\big((n+1)\;\delta t\big) = \Psi(n\;\delta t) + \dot{\Psi}(n\;\delta t)\;\delta t$ (usando $x = x_0 + v\,\delta t$),
   ii) $\ddot{\Psi}\big((n+1)\;\delta t\big) = -400\tfrac{1}{seg^2}\;\Psi\big((n+1)\;\delta t\big)$ (usando $\ddot{\Psi} = -400\tfrac{1}{seg^2}\;\Psi$)
   iii) $\dot{\Psi}\big((n+1)\;\delta t\big) = \dot{\Psi}(n\;\delta t) + \ddot{\Psi}\big((\mathrm{n}+1)\;\delta\mathrm{t}\big)\;\delta\mathrm{t}$ (usando $v = v_0 + at$)

b) Elija un δt pequeño (empiece con $\delta t = 0{,}03seg$), usando el algoritmo hallado y los valores conocidos de $\Psi(0)$ y $\dot{\Psi}(0)$ halle las posiciones posteriores $\Psi(\delta t), \Psi(2\delta t),\ \Psi(3\delta t),\ \Psi(4\delta t),\ .....$ (si se anima construya un programa que lo haga). Con estos valores elabore una tabla y grafique $\Psi(t)$, ***compare con la respuesta exacta del problema* 7** (ítem h)).

c) Pruebe con diferentes valores de δt y analice la exactitud de la aproximación para cada uno de ellos**.**

d) *Importante*. Escriba un comentario o resumen de los conceptos más importantes aprendidos en el ejercicio.

   Propuesta: Realice la integración numérica usando el programa Mathematica. A continuación mostramos el programa desarrollado por Florencia Carusella, a la que agradecemos por su ayuda.

   Programa en Mathematica (se ha usado un intervalo $\delta t = 0.01$).

   Intervalos de tiempo.

   dt=0.01;

   T=0.314;

   Definición de los vectores.

   Phi=Array[p,Floor[T/dt]+2];

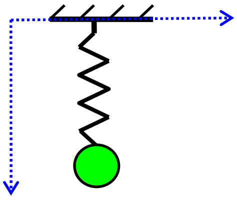
DPhi=Array[dp,Floor[T/dt]+2];
DDPhi=Array[ddp,Floor[T/dt]+2];
Condiciones iniciales.
Phi[[1]]=0;
DPhi[[1]]=0.1;
*DDPhi[[1]]=-0*400;*
Iteraciones.
```
Do[{
Phi[[k+1]]=Phi[[k]]+DPhi[[k]]*dt;
DDPhi[[k+1]]=-400*Phi[[k+1]];
DPhi[[k+1]]=DPhi[[k]]+DDPhi[[k+1]]*dt},
{k,1,Floor[T/dt]+1}]
pasos=Table[(k-1)*dt,{k,1,Floor[T/dt]+2}];
```
Gráficos:
<u>Cálculo analítico de la posición.</u>
```
p[t_]=0.005*Sin[20*t];
analitico=Plot[p[t],{t,0,T},PlotStyle->{PointSize[0.01]}];
```
<u>Cálculo numérico de la posición.</u>
```
posic=ListPlot[Transpose[{pasos,Phi}], PlotStyle->{PointSize[0.03]}];
```
<u>Grafica juntas la solución analítica y la numérica.</u>
```
Show[analítico,posic]
```
<u>Velocidad.</u>
```
veloc=ListPlot[Transpose[{pasos,DPhi}],
PlotStyle->{PointSize[0.03],RGBColor[1,0,0]}];
```
<u>Aceleración.</u>
```
acel=ListPlot[Transpose[{pasos,DDPhi}],
PlotStyle->{PointSize[0.03],RGBColor[0,0,1]}];
```

<u>Segundo Programa:</u> Resolución numérica, método interno del Mathematica.
```
numer=NDSolve[{y”[x]+400*y[x]==0,y[0]==0,y’[0]==0.1},
y,{x,0,0.314}];
```
Gráfico
```
resol=Plot[Evaluate[y[x]/.numer],{x,0,0.314},
PlotStyle->RGBColor[1,0,0]];
```
Superposición de ambas resoluciones.
```
Show[resol,posic,analitico];
```
e) *Optativo*. Este es uno de los peores métodos de integración, una posible mejora sería aproximar mejor la velocidad con que calculamos el desplazamiento en cada paso, sería más exacto si usásemos una velocidad promedio, estudiarlo y mejorar el algoritmo.
f) *Optativo*. Si conoce algún método de integración más exacto (ej. Runge Kuta) úselo.

12. Recomendado, Ejercicio Teórico. Con este ejercicio pretendemos comprobar una propiedad importante de los sistemas armónicos unidimensionales, que ***tomando como origen de coordenadas al punto de equilibrio, la descripción del sistema, resulta equivalente al problema simple de una masa y un resorte moviéndose sobre una superficie sin fricción*** (ver ejercicio 7).

Veamos el ejemplo: Un cuerpo de $m = 1kg$ cuelga del techo por medio de un resorte de constante elástica $k = 400N/m$ y longitud relajada de $l_0 = 10cm$, como se muestra en la figura 11.

Fig.11



Como primer modelo, consideramos que no existe fricción de ninguna especie y que el sistema no disipa energía de ninguna otra forma.

a) *Importante.* Plantee la ecuación dinámica del sistema ($F = m\,a$). Suponemos que, sobre la masa, sólo actúan la fuerza peso y la fuerza elástica del resorte (por ejemplo, ***la masa se ha desplazado y se ha soltado, describimos la evolución a partir de ese instante***).
Resp. $m\ \ddot{y}(t) = -k\,[y(t) - l_0] + mg$ **(1)**
(ecuación diferencial de segundo orden lineal e inhomogénea)

b) Halle la posición de la masa en el equilibrio (la resultante de las fuerzas es nula).
Resp. $y_{\text{equi}} = l_0 + \dfrac{mg}{k} = 12{,}45cm$ *donde* $g = 9{,}8m/seg^2$

c) Hemos anticipado que ***si se toma como origen de coordenadas al punto de equilibrio, la descripción del sistema armónico resulta equivalente al problema simple de una masa y un resorte moviéndose sobre una superficie sin fricción.*** Para comprobar esto, analice el cambio de coordenadas:
$$\Psi(t) = y(t) - y_{\text{equi}} = y(t) - l_0 - \frac{mg}{k} \qquad \textbf{(2)}$$
¿Qué describe la variable Ψ?.

d) Demuestre que con el cambio de variables anterior la ecuación diferencial **1** se transforma a,
$$\ddot{\Psi}(t) = -\frac{k}{m}\ \Psi(t) \qquad \textit{(oscilador armónico)} \qquad \textbf{(3)}$$

e) Discuta sobre las implicancias de lo hallado en el ítem anterior.

f) *Importante.* Halle la frecuencia y el período de oscilación. ¿Se modifica la frecuencia de oscilación por el hecho de que el resorte está colgado y no horizontal?.
Resp. $\omega = 20\ rad/seg$, $T \cong 0{,}314seg$.

g) *Importante.* Suponiendo que inicialmente la masa está en su posición de equilibrio y se desplaza hacia abajo con una velocidad de $1 m/_{seg}$, halle la ley de movimiento de la masa, es decir, halle $\Psi(t)$ (amplitud A y fase δ) y, a partir de este resultado, halle $y(t)$. Discuta.
Resp. $y(t) = y_{\text{equi}} + \Psi(t) = y_{\text{equi}} + A\cos(\omega t + \delta)$ **(4)**
donde $y_{\text{equi}} = 0{,}1245m$ $\quad \omega = 20\ rad/seg$ $\quad A = 5cm = 0{,}05m$ *y* $\delta = -\pi/2$
Vuelva a obtener la solución usando el Mathematica,
Dsolve[{psi''[t]+400 psi[t]==0,psi[0]==0,psi'[0]==1},psi[t],t]*

h) Grafique las funciones $\Psi(t)$ e $y(t)$. Discuta.
Usando el Mathematica,
*psi[t_]=0.05*Cos[20*t-Pi/2];*
Plot[psi[t],{t,0,1},

PlotRange->{-0.055,0.055},
PlotStyle->{RGBColor[0,0,1]}];

i) Halle la energía cinética (en función del tiempo).

j) *Importante*. Estamos interesados en hallar la energía potencial elástica y gravitatoria, pero por razones que luego quedarán claras, resulta conveniente fijar el cero de potencial, no en la posición relajada del resorte sino, en la posición de equilibrio del sistema (y_{equi}), es decir, queremos que $E_{\text{p}}(y_{\text{equi}})=0$.

El potencial se puede definir a menos de una constante, la constante debe ser elegida de tal forma que el potencial se anule en el punto elegido como cero del potencial.

Veamos el ejemplo de la energía potencial elástica. En *el jardín de infantes* nos enseñaron que la energía potencial elástica puede calcularse a partir de la ecuación,

$$E_{\text{p}}^{\text{el}}=\tfrac{1}{2}k\,\Delta x^2 \qquad \textbf{(5)}$$

donde $\Delta x = x - l_0$ indica cuánto se aparta la masa de la posición relajada del resorte, note que no figura ninguna constante sumando, es decir, la constante es cero.

Pero la expresión **5** sólo es válida cuando el cero de potencial se toma en el punto en donde el resorte se halla relajado, de hecho cuando $\Delta x = 0$ la energía potencial, dada en la ecuación **5,** se anula.

En el caso general, en donde el cero de potencial no se fija en la posición relajada, la expresión **5** debe modificarse. La expresión general tiene la forma,

$$E_{\text{p}}^{\text{el}}=\tfrac{1}{2}k\,\Delta x^2+constante \qquad \textbf{(6)}$$

donde la constante debe elegirse adecuadamente para que la energía potencial se anule en el punto que deseamos fijar como cero de potencial.

Para entender un poco mejor, recordemos como es que se calcula (*en el jardín*) la expresión **5**. La energía potencial es igual a menos el trabajo realizado sobre la masa al ir desde el punto de referencia x_0 (en donde tomamos el cero de potencial) hasta la posición final x, es decir,

$$\boxed{E_{\text{p}}^{\text{el}}(x)=-\int_{x_0}^{x}\vec{F}.d\vec{x}=-\int_{x_0}^{x}-k\left(x-l_0\right)dx=\frac{1}{2}k\left(x-l_0\right)^2-\frac{1}{2}k\left(x_0-l_0\right)^2} \qquad \textbf{(7)}$$

donde hemos comprobado que la constante a sumar es,

$$constante=-\frac{1}{2}k\left(x_0-l_0\right)^2.$$

Esta constante puede calcularse sin necesidad de integrar, sólo pidiendo que la energía potencial se anule en el punto de referencia (compruébelo).

La expresión **7** nos permite hallar la energía potencial elástica para cualquier punto de referencia x_0. Claramente, la energía potencial en la posición $x=x_0$ es cero (cero de potencial), es decir,

$$E_{\text{p}}^{\text{el}}(x_0)=\frac{1}{2}k\left(x_0-l_0\right)^2-\frac{1}{2}k\left(x_0-l_0\right)^2=0$$

En el caso particular en que el punto de referencia concuerda con la posición relajada, o sea, $x_0=l_0$, entonces la ecuación **6** toma la forma de la ecuación **5** (verifique).

En nuestro problema el cero de potencial lo tomamos en el punto y_{equi}, por consiguiente, la energía potencial elástica nos queda,

$$E_{\text{p}}^{\text{el}}(y)=\frac{1}{2}k\left(y-l_0\right)^2-\frac{1}{2}k\left(y_{\text{equi}}-l_0\right)^2=\frac{1}{2}400N/m\left(y-0{,}1m\right)^2-0{,}12005\,joule$$

Comentario: Si la energía potencial de una masa (suma de todas las posibles energías potenciales, elástica, gravitatoria, electroestática, etc.) puede representarse por una función cuadrática

$$E_p = ax^2 + bx + c \qquad \text{con} \qquad a > 0$$

entonces su representación gráfica resulta una parábola hacia arriba, no necesariamente ubicada en el origen, ver figura 12. Y el movimiento de la masa resulta oscilatorio armónico, aunque la forma del potencial no sea exactamente

$$E_p = \frac{1}{2} k \Delta x^2 .$$

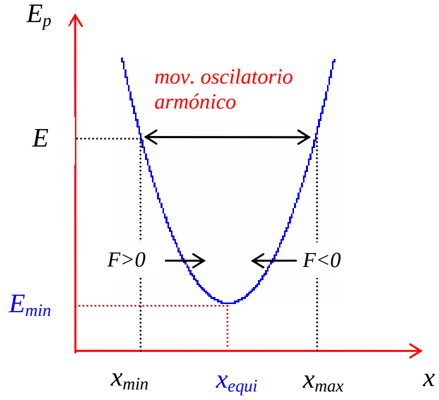


Figura 12: Gráfico de la energía potencial elástica. El vértice de la parábola corresponde al estado de equilibrio.

La posición de equilibrio se ubica en la posición que hace mínimo al potencial (fuerza nula), y la amplitud de oscilación queda determinada por la energía mecánica total E (ver figura 12).

La fuerza que actúa sobre la partícula puede obtenerse a partir de la conocida relación (para el caso unidimensional),

$$F = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -2ax - b$$

La cual puede llevarse a la forma equivalente de una fuerza elástica ejercida por un resorte $F = -k\Delta x$, si consideramos que la longitud relajada del resorte es $l_0 = -\dfrac{b}{2a}$ y su constante elástica $a = \dfrac{k}{2}$, es decir,

$$F = -2ax - b = -2a\left(x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right) = -k\left(x - l_0 \right) .$$

De acuerdo a esto, si un sistema posee un potencial cuadrático (cualquiera sea su origen físico) siempre resulta posible hallar un sistema equivalente formado por una masa y un resorte oscilando armónicamente, la frecuencia de oscilación queda determinada por la constante “ a ” y la masa.

Note que la fuerza no depende de la constante “c”, es decir, la dinámica del sistema no depende del punto que tomemos como cero de potencial. Podríamos redefinir a la energía restándole la constante “c” y nada cambiaría.

En particular c puede tomar un valor muy negativo, como por ejemplo $c = -10^{20}$ joule, con lo cual la energía mecánica resulta negativa en la mayoría de los ejemplos prácticos, hecho que no es contradictorio con los principios de la física ya que la energía mecánica puede ser negativa, su signo depende fuertemente del punto tomado como cero de potencial.

k) Compruebe que la expresión $E_p^{el} = \frac{1}{2} k\, \Psi^2$ ***¡está mal!,*** ya que, $\Psi \neq \Delta x = x - l_0$.

l) Halle la energía potencial gravitatoria (siga el análisis anterior), tome el cero de potencial en el punto de equilibrio del sistema (***¡Cuidado con el signo del potencial gravitatorio depende fuertemente del sistema de coordenadas elegido, verifique!***, recuerde que $P = -\frac{\partial E_p^{\,g}}{\partial\, y}$ y que en este sistema de coordenadas $P > 0$, ver figura 11.).

Resp. $E_p^{\,g} = -mgy + mgy_{\text{equi}} = -mg\left(y - y_{\text{equi}}\right)$ **(8)**

m) Demuestre que la energía potencial total, suma de la potencial gravitatoria y elástica, es $E_p(t) = \frac{1}{2} k \Psi(t)^2$ (tomando el cero de potencial en la posición de equilibrio). Compare con la energía potencial elástica del problema **7.**

n) Verifique que la energía total resulta,

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}\, k\, A^2} \qquad (9)$$

(***tomando como cero la posición de equilibrio***), observe que el resultado concuerda con el obtenido en el problema **8**, ¿Cómo puede ser que esto resulte así, teniendo en cuenta que en este problema el resorte está más estirado y además existe energía potencial gravitatoria?. ***Discuta***.

o) *Importante*. ¿En qué se modifica el movimiento oscilatorio por el hecho de estar colgado y no en posición horizontal?, compare con los ejercicios **7** y **8**. Hallar

p) La energía total del sistema. *Resp.* $E = 0{,}5\, joule$.

q) La energía cinética máxima. *Resp.* $E_c = 0{,}5\, joule$.

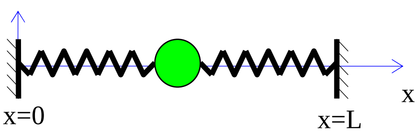
Cuando el cuerpo posee su máximo desplazamiento hacia abajo, encontrar,

r) La energía potencial gravitatoria. *Resp.* $E_p^{\,g} = -0{,}49\, joule$.

s) La energía potencial elástica. *Resp.* $E_p^{\,e} = 0{,}99\, joule$.

13. Recomendado. Una masa $m = 0{,}5kg$ desliza sobre una superficie sin fricción (sin disipar energía). Está conectada a dos paredes rígidas mediante dos resortes idénticos. Las paredes se hallan separadas una distancia $L = 3m$. Los resortes, de masa cero y perfectamente elásticos, poseen una constante elástica $k = 500 N/m$ y longitud relajada $l_0 = 1m$, ver figura 13.

Fig.13



Suponiendo que el movimiento es unidimensional (en la dirección x),

a) Plantee la ecuación dinámica del sistema ($F = m\,a$).

Resp. $m\, \ddot{x}(t) = -k\left[x(t) - l_0\right] + k\left[L - x(t) - l_0\right]$

Ayuda: recuerde que la fuerza elástica resulta proporcional al estiramiento del resorte respecto de su longitud relajada. Por consiguiente, lo primero que debe hacer es hallar la longitud del resorte en función de la coordenada $x(t)$.

Compruebe que la longitud del resorte de la izquierda resulta,

$$L_1 = x(t)$$

mientras que la longitud del resorte de la derecha es,

$$L_2 = L - x(t)$$

Deténgase a pensar el signo que le corresponde a cada término, correspondiente a las fuerzas elásticas de cada resorte.

b) Halle la posición de la masa en el equilibrio (la resultante de las fuerzas se anula). *Resp.* $x_{\text{equi}} = L/2 = 1{,}5m$

c) Demuestre que, con el cambio de variables $\Psi(t) = x(t) - x_{\text{equi}}$, la ecuación diferencial se transforma en,

$$\ddot{\Psi}(t) = -\frac{k'}{m}\,\Psi(t) \qquad \textit{(oscilador armónico)}$$

donde hemos definido $k' = 2k$.

Comentario: ***Tomando como origen de coordenadas al punto de equilibrio, la descripción del sistema, resulta equivalente al problema simple de una masa unida a un resorte, oscilando sobre una superficie sin fricción.***

d) Hallar la frecuencia y el período de oscilación. *Resp.* $\omega^2 = \dfrac{k'}{m}$

e) *Importante.* Suponiendo que inicialmente la masa m se desplaza hacia la derecha una distancia de $0{,}5m$ (desde el equilibrio) y se suelta desde el reposo, halle la ley de movimiento de la masa, es decir, halle $\Psi(t)$ y, a partir de este resultado, halle $x(t)$.

f) Halle la energía cinética (en función del tiempo).

g) Halle la energía potencial elástica (Tome como cero la posición de equilibrio).

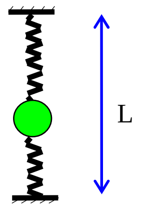
Ayuda. $E_p = \dfrac{1}{2}k\left(L_1 - l_0\right)^2 + \dfrac{1}{2}k\left(L_2 - l_0\right)^2 + cte = \dfrac{1}{2}k'\Psi^2$ *halle la constante.*

h) Verifique que la energía total resulta $E = \frac{1}{2}\,k'A^2$ (tomando como cero la posición de equilibrio), observe que el resultado es similar al obtenido en el problema **8**, ¿Cómo puede ser que esto resulte así, teniendo en cuenta que en este problema el resorte está más estirado?, ¿no importa ese estiramiento?. Discuta.

i) *Repaso*. Repita el ejercicio considerando que los resortes poseen constantes elásticas distintas o longitudes relajadas distintas.

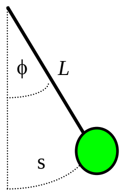
j) *Importante.* Repita los cálculos anteriores pero ahora la masa, en lugar de estar colocada sobre una superficie horizontal, se cuelga del techo en posición vertical, como indica la figura 14. ¿Cambia la frecuencia de oscilación del sistema por el hecho de estar vertical y no horizontal? ¿No influye que el resorte de arriba este más estirado que el de abajo?. Discuta.

Fig.14



14. Recomendado, Ejercicio Teórico: Péndulo. El Péndulo, aparece muy a menudo en nuestra vida cotidiana (hamacas). En este ejercicio comprobaremos que el movimiento de un péndulo resulta (en primera aproximación) armónico, cuando la amplitud de la oscilación es pequeña (luego analizaremos que es lo que consideramos pequeño).

La figura 15 muestra un péndulo simple constituido por una masa $m = 1kg$ colgada del techo por medio de una cuerda de longitud $L = 1m$ (sin masa e inextensible, ¿por qué?).



$$\boxed{\phi = \frac{s}{L}}$$

Figura 15: Péndulo simple.

a) Haga un dibujo en donde consten claramente todos los pares de interacción en juego.
b) Plantee las ecuaciones de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) que describen la evolución dinámica de la masa (problema tridimensional, por ende, existe una ecuación vectorial, o lo que es equivalente, tres ecuaciones una para cada coordenada).
c) Para simplificar el problema supondremos que el péndulo se encuentra en un sistema inercial y además que el movimiento se restringe a un plano. Esta suposición es una idealización, ya que si el péndulo se halla sobre la tierra (que no es un sistema inercial), debido a la rotación sobre su eje, el plano de oscilación varía lentamente.

   Si el movimiento se restringe a un plano, la posición de la masa puede describirse a través de una única coordenada (unidimensional), el ángulo ϕ o la longitud de arco $s = L\,\phi$. Halle la ecuación diferencial de movimiento de la masa correspondiente a la coordenada *s*,

   Resp.
$$\ddot{s}(t) = -g\ \operatorname{sen}\left(\frac{s(t)}{L}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Comentario: Esta ecuación diferencial de segundo orden es ***no lineal,*** *ya que la función $s(t)$ aparece dentro de una función seno, que claramente no es una función lineal de s. La no linealidad es debida a que* ***la interacción es no-lineal****.*

Los términos no lineales complican enormemente la resolución analítica de las ecuaciones diferenciales. En la mayoría de los casos, no existe solución analítica y sólo es posible resolverlas numéricamente.

Los términos no lineales son los responsables, en muchas situaciones, de la aparición de fenómenos físicos complejos como son los fenómenos Caóticos.

Todo lo que hasta ahora hemos estudiado va en la dirección de poder predecir la evolución futura de un sistema, conocido su estado actual. El estado inicial nunca puede conocerse con exactitud, ya que la medición de cualquier magnitud física siempre conlleva errores. Si el ***sistema dinámico es lineal*** *estos errores no imposibilitan realizar buenas predicciones sobre el sistema, ya que* ***pequeñas variaciones de las condiciones iniciales producen pequeñas variaciones de su evolución futura (sistema determinista y predecible).***

Esta pretensión determinista, sobre la posibilidad de predecir la evolución dinámica de cualquier sistema, ha guiado a la física por siglos, pero no siempre resulta posible en sistemas dinámicos complejos. Si el ***sistema dinámico es no lineal,*** *en muchos casos, resulta imposible realizar predicciones sobre la evolución futura del sistema (sistema determinista* ***no-predecible****), ya que* ***pequeñas variaciones de las condiciones iniciales pueden producir grandes variaciones en su evolución futura.***

Estos ***sistemas dinámicos complejos siguen siendo deterministas****, en el sentido de que su evolución respeta estrictamente las leyes de Newton, pero debido a la incerteza con que se conoce el estado actual,* ***no resultan predecibles*** *(aunque la incerteza sea muy pequeña). La clásica imagen con que generalmente se ilustra este concepto es: "Una mariposa mueve sus alas en Pekín y desencadena tormentas sobre New York".*

El estudio de los sistemas dinámicos complejos se ha constituido en una importante área de la matemática y de la física moderna. Nosotros no profundizaremos en el tema, pero recomendamos la lectura del libro: Nonlinear Dynamics and Chaos de Steven H. Strogatz (Addison-Wesley), el cual resulta muy didáctico, y sólo presupone conocimientos físicos y de análisis matemático elementales.

La mayoría de los sistemas físicos reales son no-lineales, y sólo algunos casos idealizados resultan lineales.

En el caso particular del péndulo los términos no lineales no conllevan fenómenos caóticos pero dificultan enormemente la resolución analítica del problema (la cual existe). Por ello en el siguiente ítem haremos una aproximación.

d) Suponga que le interesa describir sólo *las* ***pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio*** (es decir, s pequeño respecto a la longitud de la cuerda L). Por ello, en la ecuación **1,** aproximamos a la función $\operatorname{sen}(x)$ por su desarrollo en Taylor a primer orden, despreciando a los ordenes superiores, es decir,

$$\operatorname{sen}(x) = x + \textit{términos orden igual o superior a } x^3.$$

De esta forma, hemos aproximado a la función seno por una recta que pasa por el origen, de pendiente 1 (**¡** ***x en radianes*** **!**), o sea,

$$\operatorname{sen}(x) \approx x \qquad (\textbf{\textit{aproximación lineal}})$$

Discuta sobre la validez de esta ***aproximación lineal***. Pruebe con su calculadora diferentes valores de *x*, e indique para que conjunto de valores usted cree que resulta razonable la igualdad. Grafique juntas a las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = x$.

e) Verifique que, dentro de la aproximación lineal, la ecuación dinámica del péndulo es,

$$\boxed{\ddot{s}(t) \cong -\frac{g}{L}\, s(t)} \qquad \textbf{(2)}$$

(La validez de esta aproximación depende del grado de exactitud con que se desea calcular).

f) En ésta aproximación el movimiento resulta armónico ¿por qué?, ¿qué significa esto?.

g) Para pequeñas oscilaciones, halle la frecuencia angular, frecuencia y período de oscilación del sistema.

Resp. $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} \approx 2\ seg \qquad \textit{(para pequeñas oscilaciones)} \qquad \textbf{(3)}$$

h) Estudie detenidamente la expresión **3**, de ella se desprende que el período de oscilación de un péndulo sólo depende de su longitud y de la aceleración de la gravedad del lugar en donde se analiza el fenómeno.

El período de oscilación del péndulo no depende de la masa, este hecho no es más que otra manifestación del principio de equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitatoria. Discuta.

i) La ecuación **3** resulta válida sólo para pequeñas oscilaciones. Si resuelve el problema exacto, ¿usted cree que el período de oscilación finalmente termina dependiendo de la masa del cuerpo?. Justifique.

j) *Importante.* Resuelva la ecuación de movimiento (ec. **2**), es decir, halle $s(t)$, sabiendo que a $t = 0$ la masa esta quieta y desplazada un ángulo $\phi = 5^{o}$ respecto de la vertical (¡pasar a radianes!, ¿por qué?).
Resp. $s(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ *donde* $\omega = 3{,}13\ {}^{rad}/_{seg}$, $A \approx 0{,}087m$ *y* $\delta = 0\ rad$.

k) Halle el instante en que pasa, por primera vez, por la posición de equilibrio.
Resp. $t \approx 0{,}5\ seg$.

l) Halle la velocidad tangencial y la velocidad angular de la masa al pasar por la posición de equilibrio.
Resp. $v_t \approx -0{,}272\ {}^{m}/_{seg}$ $\Omega \approx 0{,}272\ {}^{rad}/_{seg} \neq \omega$ *(discuta).*

m) *Importante.* En el instante en que pasa por la posición de equilibrio, halle la aceleración tangencial y la aceleración centrípeta de la masa y la tensión del hilo.
Resp. $a_t = 0\ {}^{m}/_{seg^2}$, $a_c \approx 0{,}074\ {}^{m}/_{seg^2}$ *y* *Tensión* $\approx 9{,}874\ N$

n) Halle la energía cinética correspondiente a la masa oscilante, en función del tiempo.

o) *Importante.* Halle la energía potencial, haga un desarrollo en Taylor y verifique que el término más bajo tiene la misma forma que el potencial elástico. Discuta.
Respuesta: Verifique que la energía potencial gravitatoria, tomando como cero de potencial el punto de equilibrio y el eje positivo de las "y" hacia arriba, resulta,

$$E_p = mgh = mgL(1 - \cos\phi) \qquad \textbf{(4)}$$

desarrollando en Taylor (para ángulos pequeños) la función $\cos\phi$*,*

$$\cos\phi = 1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \textit{terminos de orden superior} \qquad \textbf{(5)}$$

y reemplazando **5** *en* **4** *obtenemos,*

$$E_p \approx \frac{1}{2} mgL\,\phi^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{L}\,s^2 \qquad \textbf{(6)}$$

Note que si definimos una constante elástica equivalente $k = \dfrac{mg}{L}$*, la energía potencial gravitatoria se aproxima por,*

$$E_p \approx \frac{1}{2} k\, s^2 \qquad \textbf{(7)}$$

que tiene la misma forma funcional que la energía potencial elástica, por lo cual, podemos concluir nuevamente que la evolución del sistema resulta oscilatorio armónico, con frecuencia angular,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{mL}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

como ya habíamos obtenido.

p) *Importante.* En un mismo dibujo, grafique la energía potencial gravitatoria exacta dada por la ecuación **4** y la aproximada, dada por la ecuación **7** (***aproximación de pequeñas oscilaciones***), ver figura 16. Discuta.

Para graficar puede usar el programa Mathematica,

```
m=1;
g=9.8;
L=1;
k=m*g/L;
y0=m*g*L;
Ep1[s_]=m*g*L*(1-Cos[s/L]);
Ep2[s_]=k*s^2/2;
Plot[{Ep1[s],Ep2[s]},{s,-8,8},
PlotPoints->300,PlotRange->{-.1,2.2*y0},
AspectRatio->.5,
PlotStyle->{{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.001]},
{RGBColor[1,0,0],Thickness[0.001]}}]
```

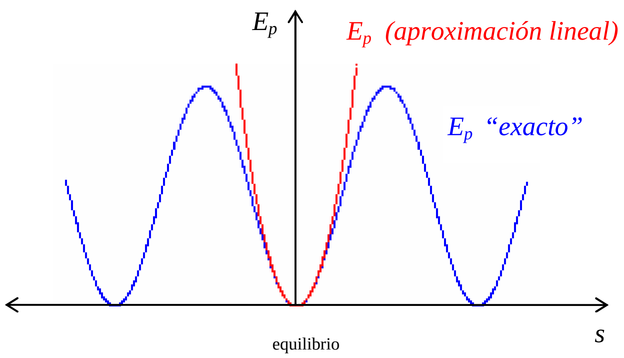


Figura 16: Gráfica de la energía potencial gravitatoria, correspondiente a la masa oscilante. Para pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio, resulta bien aproximado por un potencial elástico equivalente (parábola).

En la figura 16, observamos lo bien que aproxima la parábola al potencial "exacto", cerca del punto de equilibrio. Por esta razón resulta una buena aproximación el considerar que el péndulo oscila armónicamente para pequeños ángulos de apartamiento.

q) Halle la energía mecánica total. Demuestre que usando la expresión aproximada para la energía potencial (ec. **7**), la energía mecánica total resulta equivalente a la hallada en el caso del resorte (ejercicio **7**).

Resp. $\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$ *donde* $k = \frac{mg}{L}$ **(8)**

r) Con esta aproximación el movimiento ¿es armónico? ¿qué quiere decir esto?. ¿Qué cree que sucedería si el péndulo se apartase un ángulo grande?. Discuta.

s) ¿Cuál sería el período de este péndulo en la Luna, en donde la aceleración de la gravedad es un sexto de la correspondiente en la Tierra?.

t) *Experimento casero.* Tome un hilo y una pequeña masa, constrúyase un péndulo. Con su reloj mida el tiempo que demora en realizar varías oscilaciones (mientras mayor es el número de oscilaciones menor resulta el error cometido, discuta). Determine la aceleración de la gravedad.

15. Repaso. Si el período de un péndulo de $70cm$ de longitud es $1{,}68seg$, ¿Cuál es el valor de la g en ese lugar de la tierra?.

16 Recomendado: Principio de superposición. Las ecuaciones diferenciales **lineales** homogéneas tienen la siguiente importante e interesante propiedad**: *La suma de dos soluciones cualesquiera es también solución*.**

Las ecuaciones no lineales no tienen esta propiedad: ***La suma de dos soluciones de una ecuación no lineal no necesariamente es una solución de la ecuación*** (Las consecuencias de éste hecho son muy importantes y serán enfatizadas durante todo el curso, en particular ver el capítulo 6).

Probe estas dos afirmaciones,

a) **Lineal:** Suponga que ha encontrado que la ecuación dinámica del movimiento de un sistema con un grado de libertad es de la forma,

$$\ddot{\Psi}(t) = -\omega^2\ \Psi(t) \qquad (\textit{ecuación diferencial lineal})$$

y que ha hallado dos soluciones $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ de la ecuación diferencial. Verifique que la función $\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t)$ también es solución, es decir, satisface la ecuación diferencial.

Ayuda: Reemplace $\Psi(t)$ por $\Psi_1(t)+\Psi_2(t)$ y $\ddot{\Psi}(t)$ por $\ddot{\Psi}_1(t)+\ddot{\Psi}_2(t)$ y use el hecho de que $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ son soluciones de la ecuación, es decir, que satisfacen $\ddot{\Psi}_1(t) = -\omega^2\ \Psi_1(t)$ y $\ddot{\Psi}_2(t) = -\omega^2\ \Psi_2(t)$ (con la misma frecuencia ω).

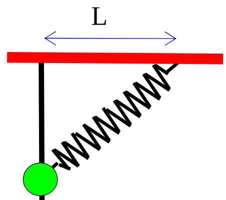
b) **No Lineal:** Suponga que ha encontrado que la ecuación dinámica del movimiento de un sistema con un grado de libertad es de la forma,

$$\ddot{\Psi}(t) = -\omega^2\ \Psi(t) + \alpha\ \Psi(t)^2 \qquad (\textit{ecuación diferencial no lineal})$$

donde α es una constante, y suponga que ha hallado dos soluciones $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ de la ecuación diferencial. Verifique que la función $\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t)$ ***no es solución***, es decir, no satisface la ecuación diferencial.

17. Recomendado. Una masa $m = 1kg$ se halla dispuesta sobre una guía vertical, donde puede deslizar con rozamiento despreciable. Además, se halla sujeta a un resorte, colgado del techo, de constante elástica $k = 400N/m$ y longitud relajada l_0, como indica la figura 17.

Fig.17



a) Halle la ecuación dinámica del sistema. Note que la ecuación diferencial es no lineal. ¿La evolución resulta oscilatoria armónica?.

Resp. $m\ddot{y} = -k\left(\sqrt{y^2+L^2} - l_0\right)\ \dfrac{y}{\sqrt{y^2+L^2}} + mg$

b) Queremos determinar la posición de equilibrio del sistema (y_{equi}). Para que las cuentas se simplifiquen, elegimos valores muy particulares de L y de la longitud relajada del resorte l_0,

$$L = \sqrt{3}\, l_0 \qquad \text{y} \qquad l_0 = 2\frac{mg}{k}$$

Verifique que, con estos datos, el sistema alcanza su equilibrio en el punto de coordenada,

$$y_{\text{equi}} = l_0$$

¡*Este resultado no es general, la posición de equilibrio concuerda con* l_0 *debido a la arbitraria elección de las longitudes* L y l_0 (para que las cuentas resulten fáciles)!.

c) Haga un cambio de variables de tal forma de describir al sistema a partir de su posición de equilibrio ($\Psi = y - y_{\text{equi}} = y - l_0$) y obtenga la nueva ecuación dinámica.

Resp. $m\ddot{\Psi} = -k\Psi - kl_0 + \dfrac{kl_0\left(\Psi + l_0\right)}{\sqrt{\left(\Psi + l_0\right)^2 + L^2}} + mg$

d) El primer término del segundo miembro, de la ecuación anterior, es el usual en una ecuación armónica, no así el resto de los términos. Haremos una aproximación para poder resolver la ecuación analíticamente, consideraremos que las oscilaciones son muy pequeñas, es decir, los apartamientos del equilibrio, dados por Ψ, son pequeños respecto de l_0 y L. Dentro de ésta aproximación, vamos a aproximar los 3 últimos términos de la ecuación dinámica por el primer orden de su desarrollo en Taylor alrededor del equilibrio $\Psi = 0$. Demuestre que a primer orden se cumple,

$$-kl_0 + \frac{kl_0\left(\Psi + l_0\right)}{\sqrt{\left(\Psi + l_0\right)^2 + L^2}} + mg \cong \frac{3}{8} k\,\Psi + \ldots..$$

e) Usando la aproximación anterior, la ecuación dinámica queda,

$$m\ddot{\Psi} = -k\Psi - kl_0 + \frac{kl_0\left(\Psi + l_0\right)}{\sqrt{\left(\Psi + l_0\right)^2 + L^2}} + mg \cong -k\Psi + \frac{3}{8} k\,\Psi = -\frac{5}{8} k\,\Psi$$

f) Halle la frecuencia de oscilación, dentro de la aproximación de pequeñas oscilaciones.

g) Halle la ley dinámica sabiendo que en el instante inicial la masa se hallaba en reposo en la posición $y(0) = 2l_0$. *Resp.* $y(t) = l_0 + l_0 \cos(\omega t)$ *donde* $\omega = \sqrt{\dfrac{5k}{8m}}$

18. Repaso. Suponga que una partícula tiene una energía potencial qué, para valores pequeños de x, es $V = Ax^4$.

a) ¿Resulta oscilatorio el movimiento?, responda usando argumentos energéticos.

b) ¿Resulta armónico el movimiento oscilatorio correspondiente?

c) ¿Cómo cree usted que variará el período al variar la amplitud en estas oscilaciones?.

19. Repaso. Una masa $m = 5g$ unida a un resorte (sin masa) de constante elástica $k = 400N/m$, oscila horizontalmente (sin rozamiento). Suponiendo que en el instante inicial el resorte se halla estirado $1cm$, respecto de su longitud relajada, y que en ese momento posee una velocidad de $1cm/seg$, en la dirección en que se estira el resorte, haga todos los cálculos, gráficos y discusiones que crea necesario para describir el problema dinámico.

20. Repaso. Una partícula de masa $m_1 = 2kg$ apoyada sobre una superficie horizontal sin rozamiento se liga a una pared por medio de un resorte de constante elástica $k = 600N/m$. Otro partícula de masa $m_2 = 1kg$ desliza sobre la superficie acercándose al primero a una velocidad de $6m/seg$.

a) Halle la amplitud y el período de oscilación si el segundo objeto choca de forma perfectamente inelástica quedando unido a la primer masa.

Resp. $A = 0{,}141m \ y \ T = 0{,}444seg$.

b) Halle la amplitud y el período de oscilación si el choque fuese elástico.
Resp. $A = 0{,}231m \ y \ T = 0{,}363seg$.

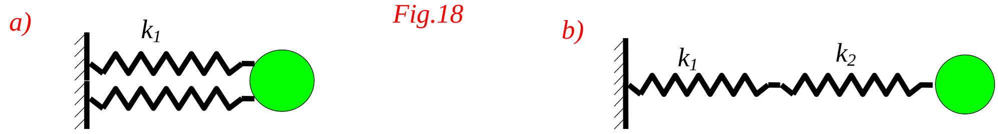
c) Para cada tipo de choque, halle las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que describen las posiciones de las dos masas en función del tiempo, suponiendo que el choque se produce en el instante $t = 0$ (suponer las masas puntuales).
Resp. En el caso de colisión inelástica $x_1(t) = x_2(t) = 0{,}141 \ \cos(14{,}1\, t - \pi/2)$
En el caso de colisión elástica $x_1(t) = 0{,}231 \ \cos(17{,}3\, t - \pi/2)$ *y* $x_2(t) = 2\, t$

d) ¿Cuál es el impulso aplicado a la partícula 1 en cada caso?.
Resp. $p_1 = -4kgm/seg$ *y* $p_1 = -8kgm/seg$ *respectivamente.*

21. Repaso. Considerando valores razonables para la masa de un coche y su período de oscilación vertical, estimar la constante elástica de los amortiguadores que actúan sobre sus 4 ruedas.

22. Repaso. Supongamos que un cuerpo de masa m está sujeto a dos resortes, de constantes elásticas k_1 y k_2 respectivamente, en la forma indicada en la figura 18.

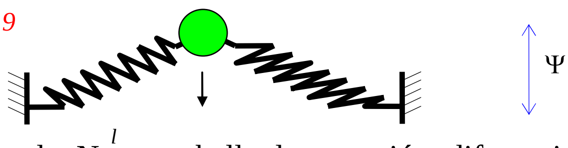
Fig.18



¿Cuál es la frecuencia de oscilación cuando los resortes están en paralelo (*a*) y en serie (*b*).

23. Repaso. Una masa m desliza sobre una superficie sin fricción, conectada a dos paredes rígidas mediante dos resortes idénticos, de constante elástica k y longitud relajada l_0. La separación entre las paredes es igual a $L = 2l$, con $l \geq l_0$. Estamos interesados en estudiar las oscilaciones transversales del sistema, ver figura 19.

Fig.19



a) A partir de las leyes de Newton halle la ecuación diferencial que describe el desplazamiento transversal de la masa.

Resp. $$\ddot{\Psi}(t) = -\frac{2k}{m}\Psi(t)\left(1 - \frac{l_0}{l'}\right),$$

donde $l' = \sqrt{l^2 + \Psi^2}$ *es la longitud del resorte estirado (depende de* Ψ*).*

b) La ecuación anterior ¿Es una ecuación diferencial lineal?, si no lo fuera ¿qué complicaciones trae aparejada?.
*Comentario: **Note que la interacción resulta no lineal a pesar de que las interacciones son elásticas. Las interacciones lineales sólo aparecen en casos muy particulares.***

c) Utilice la aproximación de pequeñas oscilaciones para resolverla, es decir, básese en el hecho de que el desplazamiento Ψ es tan pequeño que la longitud del resorte l' puede aproximarse por su desarrollo en Taylor a orden cero, es decir $l' \approx l$. ¿Qué ganamos con esto?.

d) En la aproximación de pequeñas oscilaciones, halle la frecuencia de oscilación del sistema y ley de movimiento de la masa (invente condiciones iniciales).

Resp. $\omega_1^{\ 2} = \dfrac{2\,T_0}{m\,l}$, *donde* $T_0 = k\left(l - l_0\right)$ *(tensión del resorte).*

24. Repaso. La aceleración debida a la gravedad g varía con el lugar de la Tierra debido a su rotación y porque la Tierra no es exactamente esférica. Este hecho fue descubierto por primera vez durante el siglo *XVII*, cuando se observó que un reloj de péndulo cuidadosamente ajustado para marcar el tiempo correcto en París, atrasaba alrededor de $90 seg / dia$ cerca del Ecuador.

a) Demostrar que una pequeña variación en la aceleración Δg produce un pequeño cambio ΔT en el período de un péndulo dado por: $\dfrac{\Delta T}{T} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}$. *Ayuda: hacer un desarrollo en Taylor y quedarse sólo con el primer orden.*

b) ¿Qué variación de g se necesita para justificar un cambio de período de $90 seg / dia$.

Bibliografía:

- *Física Vol. 1*, **Tipler**. Ed. Reverté.
- *Física*, **Gettys, Keller, Skove**. Mc Graw Hill.
- *Física, Mecánica, ondas y termodinámica Vol. 1*, **D.E.Roller and R.Blum**. Ed. Reverté**.**
- *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas*. **U. Ingard y W.L. Kraushaar**, Ed. Reverté.
- *Curso de Física de Berkeley, Mecánica, Vol. 1* Ed. Reverté.
- *Física, Mecánica Vol. 1,* **M. Alonso y E.J. Finn,** Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.
- *Física Vol 1*, **Feynman**. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.